Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2011

Roberto Cortez
Ángel Pardo
Alfredo Torrico

PAUTA CONTROL 1

P1. *a)* En cátedra se vio que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$. Usando esto repetidas veces, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \cup G) - \mathbb{P}(E(F \cup G)) \\ &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(FG) - \mathbb{P}(EF \cup EG) \\ &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(FG) - [\mathbb{P}(EF) + \mathbb{P}(EG) - \mathbb{P}(EFEG)] \\ &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(FG) - \mathbb{P}(EF) - \mathbb{P}(EG) + \mathbb{P}(EFG).\end{aligned}$$

b) Sean los eventos

D : la persona es descubierta
R : se realiza el sondeo regular.

1) Nos piden calcular $\mathbb{P}(D^c)$. Notando que R^c corresponde a que se aplique el sondeo exhaustivo, y usando la regla de probabilidades totales, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D^c) = \mathbb{P}(D^c|R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(D^c|R^c)\mathbb{P}(R^c) &= \frac{9}{10}\cdot\frac{75}{100} + \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{100} \\ &= \frac{9}{10}\cdot\frac{3}{4} + \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{4} = \frac{27+5}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

2) Usando la misma notación, nos piden calcular $\mathbb{P}(R|D^c)$. Utilizando la regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(R|D^c) = \frac{\mathbb{P}(D^c|R)\mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(D^c)} = \frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{75}{100}}{\frac{4}{5}} = \frac{27}{32}.$$

3) Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad de veces que la persona es descubierta. Por lo hecho anteriormente, la probabilidad de que sea descubierta es de $1/5$, luego X es una variable binomial de parámetros n y $1/5$. Para que no le den una multa, deben descubrirlo a lo más una vez, luego la probabilidad buscada es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) &= \binom{n}{0}(1/5)^0(4/5)^n + \binom{n}{1}(1/5)^1(4/5)^{n-1} \\ &= (4/5)^n + n(1/5)(4/5)^{n-1} = \frac{4^n + n4^{n-1}}{5^n}\end{aligned}$$

P2. *a)* 1) La probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

El numerador corresponde a las formas de escoger una de las 4 pintas, y luego escoger 5 cartas de dicha pinta. El denominador es la cantidad total de formas de escoger las 5 cartas.

2) La cantidad buscada es

$$\frac{\binom{13}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}.$$

El numerador corresponde a escoger 2 de los 13 números disponibles, luego escoger 2 de 4 cartas para cada número escogido, y por último escoger 1 carta de las $52-8$ que quedan disponibles.

3) La probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}.$$

El numerador corresponde a escoger 1 de los 13 números disponibles, escoger las 4 cartas de dicho número, y luego escoger 1 carta entre las $52-4$ disponibles.

b) Sea $X \sim \text{geom}(p)$. Notemos que para cualquier $s \in \{1,2,\dots\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>s) = \sum_{k=s+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=s+1+k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{s+1+k-1}p\\ &= (1-p)^s p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = (1-p)^s p\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^s,\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de la serie geométrica. Usando el cálculo previo, tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>t+s|X>t) &= \frac{\mathbb{P}(X>t+s, X>t)}{\mathbb{P}(X>t)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X>t+s)}{\mathbb{P}(X>t)} = \frac{(1-p)^{t+s}}{(1-p)^t} = (1-p)^s = \mathbb{P}(X>s),\end{aligned}$$

donde hemos usado que el evento $\{X>t+s\}$ está contenido en $\{X>t\}$. Esto prueba lo pedido para la variable geométrica. Sea ahora $X\sim\exp(\lambda)$. Para $s>0$ cualquiera, tenemos:

$$\mathbb{P}(X>s) = \int_s^{\infty} f_X(x)dx = \int_s^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_s^{\infty} = e^{-\lambda s}.$$

Usando esto, se tiene entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>t+s|X>t) &= \frac{\mathbb{P}(X>t+s, X>t)}{\mathbb{P}(X>t)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X>t+s)}{\mathbb{P}(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X>s),\end{aligned}$$

lo cual prueba lo buscado.

P3. *a*) Claramente $R_X = \{m, m+1,\dots,n\}$, pues como se extraen bolitas sin reposición, lo menor que puede ser el máximo es m, que ocurre cuando se extran las bolitas $1,\dots,m$. Calculemos la función distribución de X: para $k\in R_X$, tenemos que

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

El numerador corresponde a la cantidad de formas en que se pueden escoger $m-1$ bolitas entre las numeradas $1,\ldots,k-1$ (hay una sola forma de escoger la bolita restante: escoger la bolita numerada k). El denominador es la cantidad total de formas de escoger las m bolitas.

b) 1) Para calcular C imponemos que la integral de la densidad valga 1, es decir:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} (-x)dx + \int_{0}^{1} (C-x)dx = \frac{1}{2} + C - \frac{1}{2} = C.$$

2) Calculemos la distribución acumulada de X. Para $x < -1$ se tiene que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$, pues la densidad vale 0 en $(-\infty, x]$. Además, para $x > 1$ se tiene que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1$, pues la densidad vale 0 en (x, ∞). Para $-1 \leq x < 0$ tenemos:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \int_{-1}^{x} (-y)dy = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Además, para $0 \leq x \leq 1$, tenemos:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \int_{-1}^{0} (-y)dy + \int_{0}^{x} (1-y)dy = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}.$$

3) Calculemos la distribución acumulada de la variable aleatoria $Y = |X|$:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y).$$

Si $y < 0$, el evento $-y \leq X \leq y$ es vacío y luego la probabilidad anterior vale 0. Además, si $y > 1$, la probabilidad anterior vale 1 pues la densidad de X es positiva solo en el intervalo $[-1, 1]$. Para $0 \leq y \leq 1$, tenemos entonces:

$$F_Y(y) = \int_{-y}^{y} f_X(x)dx = \int_{-y}^{0} (-x)dx + \int_{0}^{y} (1-x)dx = \frac{y^2}{2} + y - \frac{y^2}{2} = y.$$

En resumen,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1, \end{cases}$$

lo que significa que Y es uniforme en el intervalo $[0, 1]$.