Pauta Auxiliar 4 MA3403
Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
11 de Noviembre de 2011

P1. En una marcha la probabilidad de que no hayan disturbios es $p \in [0,1]$. Siempre que hayan disturbios habrá al menos un detenido y si no hay disturbios, no hay detenidos. La probabilidad de que hayan $n \geq 1$ detenidos durante una manifestación es αq^n, $q > 0$. Calcule p en términos de α y q, ¿qué restricciones existen para p, α y q?

Sol. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad de detenidos durante una marcha. Por enunciado, $p = \mathbb{P}(X = 0)$ y $\mathbb{P}(X = n) = \alpha q^n$ para $n > 0$. Es claro que los eventos $X = n$ son disjuntos, i.e., si $n \neq m$ entonces $\{X = n\} \cap \{X = m\} = \emptyset$. Además, como la cantidad de detenidos durante una manifestación es un número entero no negativo, entonces necesariamente el evento $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X = n\} = \{X \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ocurre con probabilidad 1 (es lo mismo que decir que el rango de X es $\mathbb{N} \cup \{0\}$). Luego

$$1 = \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X = n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = p + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^n$$

La última suma converge solo si $q \in (-1, 1)$ y en tal caso vale $\alpha \frac{q}{1-q}$. Luego

$$p = 1 - \alpha \frac{q}{1-q}$$

Veamos las restricciones.
Como $q > 0$ y lo anterior tiene sentido solo para $q \in (-1, 1)$, entonces $q \in (0, 1)$. Como $\mathbb{P} \in [0, 1]$, se debe tener que $\alpha q^n \in [0, 1]$ y $p = 1 - \alpha \frac{q}{1-q} \in [0, 1]$. Además $\alpha q^n \geq 0$ ssi $\alpha \geq 0$ pues $q > 0$, y $\alpha q^n \leq 1$ ssi $\alpha \leq 1/q$ pues $q \in (0, 1)$ de modo que $q^n < q$. Además $p \geq 0$ ssi $\alpha \frac{q}{1-q} \leq 1$ ssi $\alpha \leq \frac{1-q}{q}$; y $p \leq 1$ ssi $\alpha \frac{q}{1-q} \geq 0$, lo cual ya se tiene pues $\alpha \geq 0$ y $q \in (0, 1)$. Como $\frac{1-q}{q} < \frac{1}{q}$, se concluye que las restricciones del problema son $q \in (0, 1)$ y $\alpha \in [0, \dfrac{1-q}{q}]$. □

P2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X = F$ conocida, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$. Calcule F_Y, la función de distribución de $Y := \alpha X + \beta$, en términos de α, β y F.

Sol. $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq y) = \mathbb{P}(\alpha X \leq y - \beta) = \mathbb{P}(X \leq \frac{y-\beta}{\alpha}) = F_X(\frac{y-\beta}{\alpha})$.
Como por enunciado $F_X = F$, se concluye que

$$F_Y(y) = F\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right)$$

□

P3. Sean $\alpha \in (0,1)$ y $\lambda > 0$ parámetros conocidos. Considere una variable aleatoria X cuya función de distribución está dada por

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \alpha e^{-\lambda t} & \text{cuando } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular la función de distribución de la variable aleatoria $F(X)$.

Sol. Observemos que (dibujar el grafo de F para entender lo siguiente)

- Si $s \leq 1 - \alpha$, como $F(t) \leq 1 - \alpha$ ssi $F(t) = 0$ ssi $t \leq 0$, entonces $\mathbb{P}(F(X) \leq s) = \mathbb{P}(F(X) = 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = F(0) = 0$.
- Si $s \in [1-\alpha, 1)$, entonces $\mathbb{P}(F(X) \leq s) = \mathbb{P}(X \leq s^*)$, donde s^* es el único elemento en $\mathbb{R}$ tal que $F(s^*) = s$. Por lo tanto $\mathbb{P}(F(X) \leq s) = \mathbb{P}(X \leq s^*) = F(s^*) = s$.
- Si $s \geq 1$, como $F < 1$, entonces $\mathbb{P}(F(X) \leq s) = 1$.

Así la función de distribución de la variable aleatoria $F(X)$, digamos Q, esta dada por:

$$Q(s) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } s \leq 1 - \alpha \\ s & \text{cuando } s \in (1-\alpha, 1) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

b) Si $\alpha = 1$, ¿qué distribución conocida tiene $F(X)$?

Sol. El caso en que $\alpha = 1$ corresponde a una distribución

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } t \leq 0 \\ t & \text{cuando } t \in (0,1) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Que no es otra cosa que la distribución uniforme (continua) en el intervalo $[0,1]$. □

P4. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{n}(Y-i)+a & aY \\ 1 & Y \end{bmatrix}$$

a) Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim \mathit{Geométrica}(p)$.

Sol. La matriz A es invertible ssi su determinante es no nulo, i.e., si

$$0 \neq det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n}(Y-i)+a\right)Y - aY = Y \cdot \prod_{i=1}^{n}(Y-i) = \prod_{i=0}^{n}(Y-i)$$

Como Y es una geométrica, entonces su rango es $\{1,2,\dots\}$ y $det(A) \neq 0$ ssi $Y \neq i$ para todo i entre 1 y n. En otras palabras, A es invertible ssi $Y \in \{n+1, n+2, \dots\}$. Luego la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in \{n+1,n+2,\dots\}) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=i) \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (1-p)^{i-1}p \\ &= \sum_{i=n}^{\infty}(1-p)^{i}p \\ &= p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i \\ &= p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

□

b) Calcular la misma probabilidad suponiendo que Y es absolutamente continua.

Sol. Si la variable Y es absolutamente continua, entonces $\mathbb{P}(Y=i)=0$, luego $\mathbb{P}(Y \in \{0,1,2,\dots,n\}) = 0$ y por lo tanto A es invertible con probabilidad 1. □

P5. Sea X una variable aleatoria que distribuye como una exponencial de parámetro λ, i.e., $X \sim \exp(\lambda)$. Muestre que

$$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Sol. Recordemos que una exponencial tiene densidad $f_{exp}(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, $s \geq 0$. Y su función de distribución es $F_{exp}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Sigue que

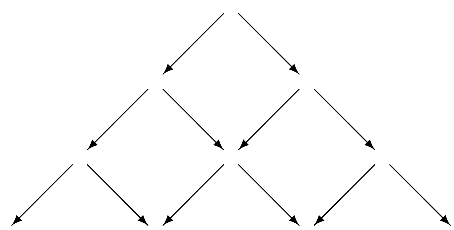
$$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t \wedge X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{1-\mathbb{P}(X \leq s+t)}{1-\mathbb{P}(X \leq t)}$$

$$= \frac{1-F_{exp}(s+t)}{1-F_{exp}(t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = 1 - F_{exp}(s) = 1 - \mathbb{P}(X \leq s) = \mathbb{P}(X > s)$$

□

P6. (Paseo aleatorio) Una pulga está parado en el punto 0 de la recta de los números enteros. De vez en cuando la pulga da un salto de largo 1; cuando lo hace, salta hacia adelante con probabilidad p o hacia atrás con probabilidad $1-p$. Denotamos por X_n la variable aleatoria que representa la posición de la pulga después de n saltos. ¿Cuál es el rango de la variable X_n? Calcule su función distribución.

Sol. Veamos el rango. Si $n = 0$ significa que la pulga no se ha movido, luego la única posibilidad es 0. Para $n = 1$, puede estar en -1 ó en 1... Siguiendo con este razonamiento, se observa que para n par, el rango de X_n es $\{-n, -n+2, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, n-2, n\}$; y para n impar, $\{-n, -n+2, \ldots, -1, 1, \ldots, n-2, n\}$. Así en general se tiene que el rango de X_n es $\{2k - n \mid k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Esta última notación puede ser un poco menos intuitiva, pero será útil para las distribuciones. Para la ditribución de X_n, pensemos primero en el caso uniforme, es decir, $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, de modo que se pueden contar los casos totales y los favorables. Después de n saltos, la pulga tiene n opciones de donde haber caído, sin embargo, hay distintas maneras de llegar a cada posición. Como en cada salto la pulga tiene dos opciones y realiza n saltos, entonces hay 2^n casos posibles, que indica la cantidad de caminos que pudo haber tomado la pulga. En el siguiente diagrama se ve las posibles rutas para $n = 0, 1, 2, 3$.



Contando los caminos posibles nos damos cuenta de que corresponde a un triángulo de pascal, de modo que para llegar al punto $2k - n$ en n saltos, hay $\binom{n}{k}$ posibilidades. Sigue que $\mathbb{P}(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k}/2^n$.

Para el caso no uniforme, es decir, $p \in (0, 1)$ cualquiera, el análisis anterior también es útil. Basta darse cuenta de que en cada posible camino de largo n hasta la posición $2k - n$, requiere haber dado k saltos adelante y $n - k$ hacia atrás. Como los saltos hacia adelante todos tienen probabilidad p y los hacia atrás, $1 - p$, cada posible camino tendrá probabilidad $p^k(1-p)^{n-k}$ y como la cantidad de tales caminos es $\binom{n}{k}$ (observar que esto coincide si contamos las formas de escoger cuando saltar hacia adelante), entonces $\mathbb{P}(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Observar el parecido con la binomial, esto se puede explicar pensando que la pulga tira una moneda con probabilidad p de cara, y cada vez que sale una cara avanza y de modo contrario retrocede. □

P7. Se lanza un dado equilibrado con n caras numeradas de 1 a n y se anota el resultado obtenido. El procedimiento se repite hasta que se obtiene un resultado que ya se anotó en algún lanzamiento previo. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad total de lanzamientos. ¿Cuál es el rango de la variable? Calcule su función distribución.

Sol. El rango de X es el conjunto $\{2, 3, \ldots, n+1\}$, pues se necesitan al menos 2 lanzamientos para que ocurra una repetición, y a lo más se realizan $n+1$, pues en el lanzamiento $n+1$ necesariamente se repite alguna de las n caras. Calculemos $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$: para que $X = k$ debe tenerse que los primeros $k-1$ lanzamientos tuvieron resultados distintos, y el lanzamiento k fue alguno de los anteriores. Es decir, los casos favorables son

$$CF = \frac{n!}{(n-(k-1))!}(k-1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-2)) \cdot (k-1)$$

Los casos totales serán la cantidad de posibles combinaciones al lanzar k veces el dado, luego $CT = n^k$. Finalmente

$$p_X(k) = \frac{n!}{(n-(k-1))!} \cdot \frac{k-1}{n^k}$$

□

P8. Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo (en horas) que una cierta componente electrónica funciona antes de fallar, y suponga que su densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2} & \text{cuando } x > 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular c.

Sol. Para calcular c usamos que la integral de la densidad de X en todo $\mathbb{R}$ debe valer 1

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{10}^{\infty} \frac{c}{x^2}\,dx = -\frac{c}{x}\Big|_{10}^{\infty} = \frac{c}{10}$$

Obteniendo $c = 10$. □

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la componente dure más de 20 horas?

Sol. La probabilidad buscada corresponde a la probabilidad de que la variable X sea mayor que 20, es decir

$$\mathbb{P}(X > 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{10}{x^2}\,dx = -\frac{10}{x}\Big|_{20}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

□

c) Calcule la función de distribución acumulada de X.

Sol.

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Luego si $x \leq 10$, entonces $F_X(x) = 0$. Si $x > 10$,

$$F_X(x) = \int_{10}^{x} \frac{10}{t^2}\,dt = -\frac{10}{t}\Big|_{t=10}^{t=x} = -\frac{10}{x} - -1 = 1 - \frac{10}{x}$$

Resumiendo

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{10}{x} & \text{cuando } x > 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□