

Auxiliar 4 MA3403

Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
11 de Noviembre de 2011

P1. En una marcha la probabilidad de que no hayan disturbios es $p \in [0, 1]$. Siempre que hayan disturbios habrá al menos un detenido y si no hay disturbios, no hay detenidos. La probabilidad de que hayan $n \geq 1$ detenidos durante una manifestación es αq^n , $q > 0$. Calcule p en términos de α y q , ¿qué restricciones existen para p , α y q ?

P2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X = F$ conocida, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$. Calcule F_Y , la función de distribución de $Y := \alpha X + \beta$, en términos de α , β y F .

P3. Sean $\alpha \in (0, 1)$ y $\lambda > 0$ parámetros conocidos. Considere una variable aleatoria X cuya función de distribución está dada por

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \alpha e^{-\lambda t} & \text{cuando } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular la función de distribución de la variable aleatoria $F(X)$.

b) Si $\alpha = 1$, ¿qué distribución conocida tiene $F(X)$?

P4. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^n (Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{bmatrix}$$

a) Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim \text{Geométrica}(p)$.

b) Calcular la misma probabilidad suponiendo que Y es absolutamente continua.

P5. Sea X una variable aleatoria que distribuye como una exponencial de parámetro λ , i.e., $X \sim \exp(\lambda)$. Muestre que

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

P6. (Paseo aleatorio) Una pulga está parada en el punto 0 de la recta de los números enteros. De vez en cuando la pulga da un salto de largo 1; cuando lo hace, salta hacia adelante con probabilidad p o hacia atrás con probabilidad $1 - p$. Denotamos por X_n la variable aleatoria que representa la posición de la pulga después de n saltos. ¿Cuál es el rango de la variable X_n ? Calcule su función distribución.

P7. Se lanza un dado equilibrado con n caras numeradas de 1 a n y se anota el resultado obtenido. El procedimiento se repite hasta que se obtiene un resultado que ya se anotó en algún lanzamiento previo. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad total de lanzamientos. ¿Cuál es el rango de la variable? Calcule su función distribución.

P8. Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo (en horas) que una cierta componente electrónica funciona antes de fallar, y suponga que su densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & \text{cuando } x > 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular c .

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la componente dure más de 20 horas?

c) Calcule la función de distribución acumulada de X .