Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniera Matemática
4 de Noviembre de 2011

# Auxiliar 3 MA3403: Probabilidades condicionales

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Angel Pardo, Alfredo Torrico.

**P1.** Tatán está decidido a entrar en el mundo de las apuestas, es por esto que se dirigió a uno de los casinos recientemente inaugurados en el país, Vallejo's Games, el cual propone un juego "secuencial" que consiste en apostar en máquinas tragamonedas que funcionan independientemente, cada una con una probabilidad $p > 0$ de entregar premio. Tatán tiene acceso a la primera máquina, donde juega, pudiendo ganar o perder. Si gana debe cobrar su premio e irse del casino, pero si pierde debe jugar en la segunda máquina. Nuevamente, si gana cobra el premio y deja el casino, pero si pierde continúa en la tercera máquina, en la cual gana o pierde y se retira del casino. Considere los sucesos $G_i$ :"Tatán recibe el premio de la máquina $i$", $i = 1, 2, 3$.

**(a)** Explique por qué los sucesos $G_i$ son disjuntos y pruebe que

$$\mathbb{P}(G_i) = p(1-p)^{i-1}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

**(b)** Calcule la probabilidad de que Tatán no gane.

**(c)** Averigüe si $G_1, G_2$ y $G_3$ son o no pares de sucesos independientes.

**(d)** Sabiendo que Tatán ha ganado, calcule la probabilidad de que el premio lo haya obtenido en la máquina $i$.

**(e)** Suponga que en lugar de 3 máquinas, hay infinitas máquinas funcionando como se describe arriba. Muestre que la probabilidad del suceso $G$ :"Ganar premio" es 1, expresando $G$ en términos de los $G_i$, $i = 1, 2, \ldots$

**P2.** Tatán ahora quiere comprarse un avión, el cual cuesta $N$ pesos, pero cuenta con un capital $k$ obtenido en Vallejo's Games, con $0 < k < N$, y para juntar lo que le falta, acepta el siguiente juego con su amigo Jackson: Tatán lanza repetidamente una moneda equilibrada; si sale cara Jackson le paga 1 peso, y si sale sello, entonces Tatán debe pagar 1 peso a Jackson. El juego termina cuando uno de los siguientes sucesos ocurre: Tatán se queda con 0 pesos, o bien junta el dinero suficiente para comprar el avión. ¿Cuál es la probabilidad de que quede sin dinero?

**P3.** Debido a que Jackson arruinó las ilusiones de Tatán en el juego anterior, éste último y su secuaz han decidido robar una valiosa obra de arte, para venderla a la mafia "Los Inútiles Subversivos" y así comprarse el avión que desea. Se sabe que los malhechores se encuentran en una de dos posibles regiones con igual probabilidad y que se comunican diariamente con algún mafioso. El GOPE está interfiriendo las comunicaciones en las dos regiones. Sin embargo, en caso de intercepción el GOPE es incapaz de determinar la región en que se originó la comunicación. En cada día, la probabilidad de que el GOPE intercepte la comunicación de los malhechores es: si están en la región 1 es $p_1 = \frac{1}{2}$, y si están en la región 2 es $p_2 = \frac{1}{4}$. El rastreo se repite cada día. Asuma que el éxito o fracaso de dicho rastreo dado que los malhechores se encuentran en una región particular, es independiente día a día.

**(a)** Calcule la probabilidad de que Tatán y su secuaz se encuentren en la región $i \in \{1, 2\}$ si se intercepta su comunicación el primer día.

**(b)** Calcule la probabilidad de que Tatán y su secuaz estén en la $i-$ésima región si la primera intercepción es el $n-$ésimo dia. Evalue para $n = 2$ y $n = 3$.

**(c)** Para distraer al GOPE, los malhechores deciden cada noche si se mueven a la otra región o no. Asuma que la decisión de moverse es independiente noche a noche. Si están en la región $i \in \{1, 2\}$, la probabilidad de cambiarse de región es $q_i$, donde $q_1 = \frac{1}{2}$ y $q_2 = \frac{1}{4}$. Calcule la probabilidad de que los malhechores se encuentren en la región $i$ al comienzo del tercer día.

**P4.** Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de subconjuntos de $\Omega$. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n),$$

y concluya que si $\mathbb{P}(E_n) = 1$ para todo $n \geq 1$ entonces $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$.
**Hint:** Estudie $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(E_n)$.

## Variables Aleatorias

**P1.** El siguiente experimento consiste en sucesivos lanzamientos independientes de una moneda con probabilidad $p$ que salga cara, el cual termina cuando sale una cara o se han hecho $n$ lanzamientos. Si denotamos $X$ la variable aleatoria asociada al número de lanzamientos, describa el espacio muestral, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ y la función de distribución asociada.

**P2.** Sea $X$ una variable aleatoria que distribuye como *geometrica*$(p)$ muestre que:

$$\mathbb{P}(X > n + k | X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$

**P3.** Se sabe que la duración (en días) de una ampolleta de la marca $A$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda_A = 0.01$, mientras que una ampolleta de la marca $B$ tiene $\lambda_B = 0.0025$. Usted escoge al azar una ampolleta de una de estas marcas, y después de 200 días de uso ésta sigue funcionando.

**(a)** ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta sea de la marca $B$?

**(b)** ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta funcione por otros 200 días?