PAUTA AUX 1

Ax de Proba

P1 (a) Sabemos que por el Ppio. de inclusión-exclusión se tiene

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

Pero $\mathbb{P}(E \cup F) \leq 1$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F) \leq 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1.$$

(b) Hagámoslo por inducción

Caso base listo, es la parte anterior.

$n \Rightarrow n+1$ Asumamos que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - (n-1)$

PDQ: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(E_i) - n.$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i \cap E_{n+1}\right) \overset{(a)}{\geq} \mathbb{P}(E_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) - 1$$

$$\underset{(H.I.)}{\geq} \mathbb{P}(E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - (n-1) - 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(E_i) - n$$

//

$\boxed{P2}$ Haciéndolo por contradicción

Supongamos que $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ $\mathbb{P}(B_i) > \frac{1}{m}$

Por ser partición sabemos que $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{m} B_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B_i)$

$\therefore$

$$\mathbb{P}(B_i) > 1/m \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B_i)}_{\Leftrightarrow \ \mathbb{P}(\Omega)} > \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} 1 = \frac{m}{m} = 1$$

$$\mathbb{P}(\Omega) > 1 \quad \rightarrow\leftarrow \quad \text{Sabemos que } \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$\boxed{P3}$

(a) A y B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Supongamos que $\mathbb{P}(A) = 1 \rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 0$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \cap A) \overset{\text{UNIÓN DISJUNTA}}{\dot{\cup}} (B \cap A^c)) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$$

Pero $\mathbb{P}(B \cap A^c) \underset{B \cap A^c \subseteq A^c}{\leq} \mathbb{P}(A^c) = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \cap A^c) = 0$$

$\therefore$ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Veamos el caso $\mathbb{P}(A)=0$

$$\mathbb{P}(A\cap B) \underset{\uparrow}{\leq} \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B)=0$$

$A\cap B \subseteq A$

$\therefore$ $\mathbb{P}(A\cap B)=0 \Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \cancel{\mathbb{P}(A)}^{0}\cdot\mathbb{P}(B) = 0$

$= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$

$\boxed{P3}$ (b) Sabemos que $\mathbb{P}(A_i)=1 \quad \forall i \Rightarrow \forall i \ \mathbb{P}(A_i^c)=0$

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Quizás no son disjuntos (*)

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right)=0 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=1$$

(*) Demostrar que para $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de conjuntos no disjuntos necesariamente se tiene

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

HINT: <u>INDUCCIÓN</u>

Combinatoria I

P1 Una forma de verlo es la sgte, primero notar que el equipo de vóleibol siempre es distinguible al resto.

(a) Primero elegimos a los 21 jugadores totales

$$\binom{40}{21}$$

Luego dentro de los 21 elegimos 5 jugadores para el primer equipo (sea A), luego de lo que resta otros 5 y así con el tercero, formando los equipos B y C.

$$\Rightarrow \binom{40}{21}\underbrace{\binom{21}{5}}_{A}\underbrace{\binom{16}{5}}_{B}\underbrace{\binom{11}{5}}_{C}\cancel{\binom{6}{6}}$$

Implícitamente ya quedaron asignados los 6 de volley

Pero podemos permutar los equipos A, B y C por eso multiplicamos por 3!

$$\# \text{FORMAS} = \boxed{\binom{40}{21}\binom{21}{5}\binom{16}{5}\binom{11}{5}\cdot 3!}$$

(b) De la misma forma que antes elegimos 21 jugadores totales dentro de 40 opciones

$$\binom{40}{21}$$

De estos 21 elegimos 15 para los equipos de babyfútbol sin separarlos porque son indistinguibles

$$\Rightarrow \# \text{FORMAS} = \binom{40}{21}\binom{21}{15}\binom{6}{6} = \binom{40}{21}\binom{21}{6}$$

Nuevamente queda seleccionado Tácitamente el equipo de volley.

Elijo primero los 6 de volley. Recordar que $\binom{21}{6} = \binom{21}{15}$

P2 (a) Se eligen subconjuntos de tamaño 7 en un total de 10

$$\# \text{FORMAS} = \binom{10}{7}$$

(b) Primero separamos la 5 primeras preguntas y elegimos 3, del resto (otras 5) elegimos 4.

$$\Rightarrow \binom{5}{3}\binom{5}{4}$$

Pero podríamos haber elegido 4 o 5 de las primeras 5

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{5}{3}}_{1^{as}\text{ cinco}}\underbrace{\binom{5}{4}}_{2^{o}\text{ grupo}} + \underbrace{\binom{5}{4}}_{1^{er}\text{ grupo}}\underbrace{\binom{5}{3}}_{2^{o}\text{ grupo}} + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1^{er}\text{ grupo}}\underbrace{\binom{5}{2}}_{2^{o}\text{ grupo}} = \# \text{FORMAS}$$

3]

(a) Está la opción de que no ~~escoja~~ escoja a esos 2 amigos están peleados

$\Rightarrow \binom{6}{5}$ elige 5 entre 6 amigos (se sacan a los 2 peleados)

Que vaya uno de los amigos peleados pero no el otro

$\Rightarrow \binom{6}{4}$ sólo me resta elegir 4 amigos ya tengo a uno peleado

Lo anterior se da viceversa también.

$\rightarrow$ # FORMAS $= \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{4}$

(b) Primero está la opción de que los elija a los 2 y me resta elegir 3 más

$\Rightarrow \binom{6}{3}$ ya seleccione a dos.

Otra opción es que no vayan los dos, en este caso elijo 5 de un total de 6

$\binom{6}{5}$

$$\# \text{ FORMAS} = \binom{6}{3} + \binom{6}{5}$$

P4 La primera opción es que tenga todas las patas del mismo color, entonces tenemos que elegir sólo un juego

$$\Rightarrow \binom{7}{1}$$

También podemos elegir 2 juegos y usar 4 de uno y 2 de otro, ó 5 de uno y uno del otro.

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{elijo los 2 juegos}} \underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{elijo 4 patas}} \cancel{\binom{2}{2}}^{1} + \binom{7}{2}\binom{6}{5}\cancel{\binom{1}{1}}^{=1}$$

Y por último podemos elegir 3 juegos y usar 4 de uno, uno del segundo y otro del restante

$$\underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{elijo 3 juegos}} \binom{6}{4}\binom{2}{1}\cancel{\binom{1}{1}}^{=1}$$

$$\Rightarrow \# \text{ FORMAS} = \binom{7}{1} + \binom{7}{2}\left(\binom{6}{4} + \binom{6}{5}\right) + \binom{7}{3}\binom{6}{4}$$

P5 Por un lado podemos elegir j de un total de n, luego i de un total de j

$$\rightarrow \binom{n}{j}\binom{j}{i}$$

Por otro lado podemos descartar gente, descartamos $(n-i)$ de un total de n, y descartamos $(n-j)$ (o sea los elegimos) de un total de $(n-i)$ descartados

$$\binom{n}{n-i}\binom{n-i}{n-j}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{n-i}\binom{n-i}{n-j}$$