Pauta Auxiliar 2 MA3403
Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
28 de Octubre de 2011

P1. Soluciones de una ecuación entera.

a) ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación?

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = M, \qquad x_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{1}$$

Sol. Pensar la ecuación (1) de la siguiente manera

$$\underbrace{*\ \ *\ \ *}_{x_1} \overset{1}{|} \underbrace{*}_{x_2} \overset{2}{|} \underbrace{*\ \ *}_{x_3} \overset{3}{|} \cdots\cdots\cdots \overset{N-3}{|} \underbrace{*\ \ *\ \ *}_{x_{N-2}} \overset{N-2}{|} \underbrace{*\ \ *\ \ *\ \ *}_{x_{N-1}} \overset{N-1}{|} \underbrace{*\ \ *}_{x_N} \qquad (M\ *\text{'s})$$

Así, para cada elección de líneas horizontales ('$|$' en el esquema) que se haga se tendrá una solución de (1), y viceversa. La restricción $x_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nos dice que dos líneas horizontales no pueden estar juntas (debe haber al menos un '$*$' entre dos '$|$' contiguos); similarmente la primera línea no puede estar antes del primer '$*$' ni la última después del último '$*$'.
Observando que entre los M $*$'s hay $M-1$ espacios y notando que debemos escoger $N-1$ de ellos para poner las líneas, la cantidad de soluciones posibles para (1) serán las posibles elecciones de las $N-1$ $|$'s en los $M-1$ espacios entre $*$'s.
Es decir, hay $\binom{M-1}{N-1}$ posibles soluciones de (1). □

b) Un inversionista tiene 20 millones de dólares para invertir en 4 posibles inversiones. Cada inversión debe ser en unidades enteras de millones de dólares. El total de los 20 millones de dólares debe ser invertido y se debe invertir en todas las opciones.

1) ¿Cuántas posibles estrategias de inversión hay?

Sol. Definimos las variables x_i: *"millones de dólares invertidos en la i-ésima posibilidad"*, con $i = 1, 2, 3, 4$. Es claro que la cantidad de estrategias posibles corresponde a las posibles soluciones de (1) con $M = 20$ y $N = 4$. Luego hay $\binom{19}{4} = 3876$ posibles estrategias de inversión. □

2) ¿Cuántas hay si no es necesario invertir el total del dinero?

Sol. Definamos adicionalmente la variable x_5: *"millones de dólares no invertidos"*. Luego hay dos posibilidades: (i) se invierte todo (i.e., $x_5 = 0$) ó (ii) no se invierte todo (i.e., $x_5 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).
En el caso (i), por la parte anterior sabemos que hay $\binom{19}{4} = 3876$ posibles estrategias de inversión.
En el caso (ii), corresponde a a las posibles soluciones de (1) con $M = 20$ y $N' = 5$, de modo que en este caso hay $\binom{19}{5} = 11628$ posibles estrategias.
Finalmente, como los casos (i) y (ii) son mutuamente excluyentes, las posibles estrategias de inversión son en total $\binom{19}{4} + \binom{19}{5} = 15504$. □

c) ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación?

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = M, \qquad x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{2}$$

Sol. Hay varias formas de enfrentar el problema. Una por ejemplo podría ser abordarlo como en (a), sin embargo en este caso existe la posibilidad de poner dos líneas horizontales contiguas y obtener por ejemplo esquemas de la forma

$$\underbrace{* \quad * \quad *}_{x_1} \overset{1}{|} \underbrace{*}_{x_2} \overset{2}{|} \underbrace{\quad}_{x_3} \overset{3}{|} \underbrace{* \quad *}_{x_4} \overset{4}{|} \ldots\ldots\ldots \overset{N-3}{|} \underbrace{* \quad * \quad *}_{x_{N-2}} \overset{N-2}{|} \underbrace{* \quad * \quad * \quad *}_{x_{N-1}} \overset{N-1}{|} \underbrace{\quad}_{x_N} \qquad (M\ *\text{'s})$$

y no necesariamente hay una forma clara de continuar de este modo (¿sí la hay?, reflexionar al respecto).
Otra forma puede ser emular la idea usada en (b.2) y considerar los casos $x_i = 0$ y $x_i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ para $i \in I \subset \{1, 2, \ldots, N\}$, usar la parte (a) y luego sumar sobre todas las posibles elecciónes de I. De esta forma se puede llegar al resultado correcto y de forma más o menos directa (hacerlo como ejercicio), pero requiere de "fuerza bruta".
Piense que otras posibles maneras de abordar el problema existen.

Una forma más sencilla, es aprovechar el resultado de (a) y darse cuenta que (2), considerando las variables auxiliares $y_i := x_i + 1$, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = M + N, \qquad y_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Sigue que (2) se puede ver como una ecuación del tipo (1) con $M' = M + N$ y $N' = N$. Luego, por (a), la ecuación (2) tiene $\binom{M'-1}{N'-1} = \binom{M+N-1}{N-1}$ posibles soluciones. □

P2. Cada Domingo, un pescador decide (de forma aleatoria) si ir al mar (con probabilidad 0.5), a un río o a un lago (con probabilidad 0.25 cada una). La probabilidad de capturar un pez si va al mar es del 80 %, si va al río, del 40 %, y si va al lago, del 60 %. Si un Domingo el pescador trae un pescado, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido al mar?

Sol. Consideramos M, R y L como los eventos de que el pescador vaya al mar, al río y al lago resp., y además P el evento de haber capturado un pez. Luego se nos pide encontrar el valor de $\mathbb{P}(M|P)$. Como conocemos $\mathbb{P}(P|M)$, usamos Bayes

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(MP)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(MP)}{\mathbb{P}(P)} \cdot \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(MP)}{\mathbb{P}(M)} \cdot \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)} = \mathbb{P}(P|M) \cdot \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}$$

Por enunciado se conoce $\mathbb{P}(P|M)$ y $\mathbb{P}(M)$. Calculamos $\mathbb{P}(P)$ usando probabilidades totales.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(P|L)\mathbb{P}(L) \\ &= 0{,}8 \times 0{,}50 + 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6 \times 0{,}25 \\ &= 0{,}65 \end{aligned}$$

Finalmente $\mathbb{P}(M|P) = \mathbb{P}(P|M) \cdot \dfrac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}5}{0{,}65} \approx 0{,}62.$ □

P3. Sea $\{B_1, B_2, \ldots B_n\}$ una familia de eventos mutuamente excluyentes tales que

$$\mathbb{P}(B_i) > 0 \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

y sea B el evento $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i$

a) Pruebe que existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\mathbb{P}(B_i) \leq \frac{1}{n}$

Sol. Supongamos que no es cierto, es decir, $\mathbb{P}(B_i) > \frac{1}{n}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Pero entonces

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

lo cual es absurdo puesto que $\mathbb{P}(B) \leq 1$. □

b) Sea A un evento que cumple

$$\mathbb{P}(A \mid B_i) = p \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pruebe que $P(A \mid B) = p$.

Sol. Calculamos directamente

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} &&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(A \cap \bigcup_{i=0}^{n} B_i) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{n} A \cap B_i) &&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) &&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_{i=0}^{n} p\mathbb{P}(B_i) \\
&= \frac{p}{\mathbb{P}(B)}\sum_{i=0}^{n} p\mathbb{P}(B_i) &&= \frac{p}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{n} B_i) \\
&= \frac{p}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B) &&= p
\end{aligned}$$

Obteniendo lo deseado. □

P4. Sea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Considere el experimento de escoger un subconjunto B y un punto x de A, con reposición, de manera independiente y equiprobable. Es decir, la elección de x es con ley equiprobable en A y la elección de B es equiprobable en $\mathcal{P}(A)$, el conjunto de las partes de A (cada subconjunto de A, incluyendo el conjunto vacío y A, tiene la misma probabilidad de ser escogido en $\mathcal{P}(A)$).
Mostrar que $\mathbb{P}(x \in B) = 1/2$
Recuerde que $\mid \mathcal{P}(A) \mid = 2^n$ y como indicación, puede condicionar con respecto a la cardinalidad de B.

Sol. Por probabilidades totales se tiene que $\mathbb{P}(x \in B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(x \in B \mid |B| = k)\mathbb{P}(|B| = k)$.

Si $|B| = k$, entonces x escogido de manera equiprobable en A tiene k casos favorables de estar en B, dentro de las n posibilidades en A, de modo que $\mathbb{P}(x \in B \mid |B| = k) = \frac{k}{n}$. Además, la cantidad de conjuntos de tamao k en A es $\binom{n}{k}$, dentro de $2^n = |\mathcal{P}(A)|$ posibilidades; y por lo tanto $\mathbb{P}(|B| = k) = \binom{n}{k}/2^n$. Así, $\mathbb{P}(x \in B) = \frac{1}{n2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}\ |_{x=1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d}{dx}x^k\ |_{x=1} \\
&= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k}\ |_{x=1} \\
&= \frac{d}{dx}(1+x)^n\ |_{x=1} \\
&= n(1+x)^{n-1}\ |_{x=1} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

Luego $\mathbb{P}(x \in B) = \frac{1}{n2^n} \cdot n2^{n-1} = \frac{1}{2}$, obteniendo lo deseado. □

P5. (El problema de Monty Hall) En un programa de televisión el animador muestra 3 puertas a un concursante. Detrás de una de ellas hay un premio (auto) y detrás de las otras dos, una cabra. El auto podría estar en cualquiera de ellas de manera equiprobable. El concursante escoge una de las 3 puertas para descubrir qué hay detrás de ella. El animador, que sabe en qué puerta está el auto, abre una de las puertas en donde hay una cabra y ofrece al concursante cambiar de puerta o mantenerse en la puerta en que estaba.

a) Sea el evento A: *"escoger la puerta ganadora en la primera elección"* (cuando están las 3 puertas cerradas). Calcular $\mathbb{P}(A)$.

Sol. Hay un solo caso favorable dentro de 3 opciones, luego $\mathbb{P}(A) = 1/3$. □

b) Sea B: *"escoger la puerta ganadora, después de que el animador abre una puerta"*. El concursante puede usar distintas estrategias para resolver la situación:

1) Si la estrategia es NO cambiar de puerta, calcular $\mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(B \mid A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.

Sol. Si se adivinó en la primera instancia y luego no cambio de puerta, entonces se gana y de otro modo se pierde. Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B|A) &= 1 \\
\mathbb{P}(B|A^c) &= 0 \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

2) Si la estrategia es SIEMPRE cambiar de puerta, calcular $\mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(B \mid A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.

Sol. Si se adivinó en la primera instancia y luego cambio de puerta, entonces se pierde y de otro modo se gana. Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B|A) &= 0 \\
\mathbb{P}(B|A^c) &= 1 \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

3) Si la estrategia es escoger al azar una de las 2 puertas que aún no se abren, calcular $\mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(B \mid A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.

Sol. Si se adivinó en la primera instancia y luego se decide de manera aleatoria cambiar o no, entonces se tiene un caso favorable (adivinar) dentro de dos opciones (las dos puertas). Si no se adivinó a la primera y se decide al azar entre las dos puertas restantes (cerradas) es lo mismo que antes. Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B|A) &= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(B|A^c) &= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

P6. Cierta enfermedad se transmite solamente de forma genética de la siguiente manera:

- Si solo el padre presenta la enfermedad, entonces el hijo tendrá probabilidad $\alpha \in (0,1)$ de presentarla.
- Si solo la madre presenta la enfermedad, entonces el hijo tendrá probabilidad $\beta \in (0,1)$ de presentarla.
- Si ambos padres presentan la enfermedad, entonces el hijo la presenta con probabilidad 1.

Además cada padre tiene probabilidad $p \in (0,1)$ de presentar la enfermedad, en forma independiente entre ellos. Y la transmisión a los hijos ocurre de manera independiente dada la condición de los padres.

a) Si alguien está enfermo, ¿cuál es la probabilidad de que la enfermedad le haya sido transmitida solo por la madre?.

Sol. Definamos los siguientes eventos

$$\begin{aligned}
P &: \text{“\textit{Sólo el padre tiene la enfermedad}”} \\
M &: \text{“\textit{Sólo la madre tiene la enfermedad}”} \\
A &: \text{“\textit{Ambos padres tienen la enfermedad}”} \\
N &: \text{“\textit{Ningún padre tiene la enfermedad}”} \\
Hi &: \text{“\textit{El hijo tiene la enfermedad}”}
\end{aligned}$$

Luego se nos pide $\mathbb{P}(M|Hi)$, que por Bayes es igual a $\frac{\mathbb{P}(Hi|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(Hi)}$. Por enunciado conocemos $\mathbb{P}(Hi|M) = \beta$, además $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(\text{madre enferma y } \textit{no}(\text{padre enfermo})) = \mathbb{P}(\text{madre enferma})\mathbb{P}(\textit{no}(\text{padre}$

enfermo)) $= \mathbb{P}$(madre enferma)$(1 - \mathbb{P}$(padre enfermo) $= p \cdot (1-p)$, donde hemos usado la independencia en la segunda igualdad.
Para $\mathbb{P}(Hi)$ usamos probabilidades totales, $\mathbb{P}(Hi) = \mathbb{P}(Hi|P)\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(Hi|M)\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(Hi|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(Hi|N)\mathbb{P}(N)$. Análogamente a lo hecho para $\mathbb{P}(M)$, se tiene que $\mathbb{P}(P) = p \cdot (1-p)$, $\mathbb{P}(A) = p^2$ y $\mathbb{P}(N) = (1-p)^2$. Además, se tiene que $\mathbb{P}(Hi|N) = 0$, ya que la enfermedad se transmite sólo genéticamente. Sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Hi) &= \mathbb{P}(Hi|P)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(Hi|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(Hi|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Hi|N)\mathbb{P}(N) \\
&= \alpha p(1-p) + \beta p(1-p) + 1p^2 + 0(1-p)^2 \\
&= p((\alpha+\beta)(1-p)+p)
\end{aligned}$$

Finalmente $\mathbb{P}(M|Hi) = \dfrac{(1-p)\beta}{p + (1-p)(\alpha+\beta)}$. □

b) Si alguien está enfermo y tiene un hermano, ¿cuál es la probabilidad de que el otro hermano también esté enfermo?.

Sol. Definimos adicionalmente el evento He : *"El otro hijo tiene la enfermedad"*, de modo que se pide calcular $\mathbb{P}(He|Hi)$.
Por definición $\mathbb{P}(He|Hi) = \frac{\mathbb{P}(Hi \cap He)}{\mathbb{P}(Hi)}$. En (a) se calculó $\mathbb{P}(Hi)$. Para $\mathbb{P}(Hi \cap He)$ usamos probabilidades totales.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Hi \cap He) &= \mathbb{P}(Hi \cap He|P)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(Hi \cap He|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(Hi \cap He|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Hi \cap He|N)\mathbb{P}(N) \\
&= \alpha^2 p(1-p) + \beta^2 p(1-p) + 1^2 p^2 + 0^2(1-p)^2 \\
&= p((\alpha^2+\beta^2)(1-p)+p)
\end{aligned}$$

Finalmente $\mathbb{P}(He|Hi) = \dfrac{p + (1-p)(\alpha+\beta)}{p + (1-p)(\alpha^2+\beta^2)}$. □