

Auxiliar 2 MA3403

Probabilidades y Estadística

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Ángel Pardo, Alfredo Torrico
28 de Octubre de 2011

P1. Soluciones de una ecuación entera.

a) ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación?

$$\sum_{i=1}^N x_i = M, \quad x_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (1)$$

b) Un inversionista tiene 20 millones de dólares para invertir en 4 posibles inversiones. Cada inversión debe ser en unidades enteras de millones de dólares. El total de los 20 millones de dólares debe ser invertido y se debe invertir en todas las opciones.

1) ¿Cuántas posibles estrategias de inversión hay?

2) ¿Cuántas hay si no es necesario invertir el total del dinero?

c) ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación?

$$\sum_{i=1}^N x_i = M, \quad x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (2)$$

P2. Cada Domingo, un pescador decide (de forma aleatoria) si ir al mar (con probabilidad 0.5), a un río o a un lago (con probabilidad 0.25 cada una). La probabilidad de capturar un pez si va al mar es del 80 %, si va al río, del 40 %, y si va al lago, del 60 %. Si un Domingo el pescador trae un pescado, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido al mar?

P3. Sea $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ una familia de eventos mutuamente excluyentes tales que

$$\mathbb{P}(B_i) > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

y sea B el evento $\bigcup_{i=1}^n B_i$

a) Pruebe que existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\mathbb{P}(B_i) \leq \frac{1}{n}$

b) Sea A un evento que cumple

$$\mathbb{P}(A \mid B_i) = p \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Pruebe que $P(A \mid B) = p$.

P4. Sea $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Considere el experimento de escoger un subconjunto B y un punto x de A , con reposición, de manera independiente y equiprobable. Es decir, la elección de x es con ley equiprobable en A y la elección de B es equiprobable en $\mathcal{P}(A)$, el conjunto de las partes de A (cada subconjunto de A , incluyendo el conjunto vacío y A , tiene la misma probabilidad de ser escogido en $\mathcal{P}(A)$).

Mostrar que $\mathbb{P}(x \in B) = 1/2$

Recuerde que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ y como indicación, puede condicionar con respecto a la cardinalidad de B .

P5. (El problema de Monty Hall) En un programa de televisión el animador muestra 3 puertas a un concursante. Detrás de una de ellas hay un premio (auto) y detrás de las otras dos, una cabra. El auto podría estar en cualquiera de ellas de manera equiprobable. El concursante escoge una de las 3 puertas para descubrir qué hay detrás de ella. El animador, que sabe en qué puerta está el auto, abre una de las puertas en donde hay una cabra y ofrece al concursante cambiar de puerta o mantenerse en la puerta en que estaba.

- a) Sea el evento A : “escoger la puerta ganadora en la primera elección” (cuando están las 3 puertas cerradas). Calcular $\mathbb{P}(A)$.
- b) Sea B : “escoger la puerta ganadora, después de que el animador abre una puerta”. El concursante puede usar distintas estrategias para resolver la situación:
 - 1) Si la estrategia es NO cambiar de puerta, calcular $\mathbb{P}(B | A)$, $\mathbb{P}(B | A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.
 - 2) Si la estrategia es SIEMPRE cambiar de puerta, calcular $\mathbb{P}(B | A)$, $\mathbb{P}(B | A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.
 - 3) Si la estrategia es escoger al azar una de las 2 puertas que aún no se abren, calcular $\mathbb{P}(B | A)$, $\mathbb{P}(B | A^c)$ y $\mathbb{P}(B)$.

P6. Cierta enfermedad se transmite solamente de forma genética de la siguiente manera:

- Si solo el padre presenta la enfermedad, entonces el hijo tendrá probabilidad $\alpha \in (0, 1)$ de presentarla.
- Si solo la madre presenta la enfermedad, entonces el hijo tendrá probabilidad $\beta \in (0, 1)$ de presentarla.
- Si ambos padres presentan la enfermedad, entonces el hijo la presenta con probabilidad 1.

Además cada padre tiene probabilidad $p \in (0, 1)$ de presentar la enfermedad, en forma independiente entre ellos. Y la transmisión a los hijos ocurre de manera independiente en cada caso.

- a) Si alguien está enfermo, ¿cuál es la probabilidad de que la enfermedad le haya sido transmitida solo por la madre?.
- b) Si alguien está enfermo y tiene un hermano, ¿cuál es la probabilidad de que el otro hermano también esté enfermo?.