



GUÍA EJERCICIOS 1

1. Sean E y F eventos.

- Pruebe que $\mathbb{P}(EF^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(EF)$.
- Pruebe que $\mathbb{P}(E^c F^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.
- Pruebe que la probabilidad de que exactamente uno de ellos ocurra es igual a $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(EF)$.

2. Sean, E , F y G eventos. Pruebe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) \\ &\quad - \mathbb{P}(E^c F G) - \mathbb{P}(E F^c G) \\ &\quad - \mathbb{P}(E F G^c) - 2\mathbb{P}(E F G).\end{aligned}$$

3. Considere un experimento cuyo espacio muestral Ω tiene una cantidad infinita numerable de elementos. Pruebe que no todos los puntos (singletons) pueden tener la misma probabilidad. ¿Es posible que todos los puntos tengan probabilidad estrictamente positiva?

4. Un mazo inglés (52 cartas) se revuelve y se van mostrando las cartas una por una. Dé un espacio muestral adecuado para describir este experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que la catorceava carta sea un as? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer as aparezca en la catorceava carta?

5. Una urna contiene n bolitas blancas y m negras.

- Se sacan dos bolitas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?
- Se saca una bolita al azar y se devuelve a la urna, luego se saca una segunda bolita al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolitas sean del mismo color?
- Pruebe que la probabilidad del segundo caso es siempre mayor.

6. Una empresa cuenta con 15 trabajadores: 5 ingenieros y 10 técnicos. La empresa produce 2 tipos de productos A y B . El producto A requiere 3 ingenieros y 6 técnicos. El producto B requiere 2 ingenieros y 4 técnicos. ¿De cuántas maneras se pueden asignar los puestos de trabajo en la empresa?

7. En un curso de 40 alumnos deben formarse tres equipos de baby fútbol (5 jugadores) y uno de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si

- los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?
- los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

8. Una mano de póker consta de 5 cartas escogidas al azar del total de 52 que posee el mazo inglés. Calcule la probabilidad de obtener:

- Color: las 5 cartas son de la misma pinta.
- Un par: dos cartas tienen el mismo número entre sí, y las tres restantes tienen números distintos al resto y entre sí.
- Dos pares: dos cartas tienen el mismo número entre sí, otras dos poseen el mismo número entre sí, pero distinto al anterior, y la última tiene un número distinto al resto.
- Un trío: tres cartas tienen el mismo número entre sí, y las dos restantes tienen un número distinto al resto y entre sí.
- Póker: cuatro cartas tienen el mismo número.

9. Un tren, en el que se encuentran n pasajeros, debe efectuar m paradas. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los pasajeros entre estas paradas, suponiendo que

- los pasajeros son distinguibles entre sí?
- los pasajeros son indistinguibles entre sí?
- los pasajeros son indistinguibles entre sí y se sabe que en la parada i -ésima bajan al menos n_i , para todo $i = 1, \dots, m$? Suponga $\sum_{i=1}^m n_i \leq n$.

10. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen n turnos de noche y n turnos de día. De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren de noche y $0 < b < n$ prefieren de día. El resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda el turno que quería.

11. Una urna contiene n bolitas rojas y m azules. Se extraen bolitas sucesivamente hasta que se hayan obtenido r rojas, con $r \leq n$. Calcule la probabilidad de que se extraigan k bolitas en total.

12. Considere n personas que se deben ordenar, dentro de las cuales hay un matrimonio. Si las personas se ordenan en una línea, ¿cuál es la probabilidad de que el matrimonio quede junto? ¿Cuál es esta probabilidad si las personas se ordenan en círculo?

13. Un grupo de 6 hombres y 6 mujeres es dividido al azar en dos grupos de tamaño 6 cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos grupos tengan el mismo número de hombres?

14. Una mujer tiene n llaves, de las cuales sólo una abre la puerta. Si va probando las llaves de una al azar, descartando aquellas que no abren la puerta, ¿cuál es la probabilidad de que abra la puerta en el k -ésimo intento? Si no descarta las llaves que no funcionan, ¿cuál es esta probabilidad?

15. Un matrimonio posee dos hijos. Si se sabe que al menos uno de ellos es varón, ¿cuál es la probabilidad de que ambos lo sean?

16. Dos cajas contienen fósforos buenos y fósforos malos. Suponga que la primera caja contiene n_1 fósforos buenos y n_2 fósforos malos, y la segunda caja contiene m_1 fósforos buenos y m_2 fósforos malos. Se elige una caja al azar, y de esa caja se elige un fósforo al azar. Calcule la probabilidad de que el fósforo elegido sea bueno.
17. Se dispone de dos urnas, I y II. En la urna I hay m_1 bolitas blancas y n_1 negras; en la urna II hay m_2 blancas y n_2 negras. En un primer esquema de extracción se selecciona una urna (la urna I con probabilidad p_1 y la II con probabilidad p_2) y luego, de la urna seleccionada se extrae una bolita al azar. En el segundo esquema las bolitas de ambas urnas se juntan y se extrae al azar una bolita. Calcule la probabilidad de obtener una bolita blanca en cada uno de los esquemas descritos y muestre que ambos valores coinciden si p_1 y p_2 se escogen proporcionales a los tamaños (número total de bolitas) de las respectivas urnas.
18. Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo. Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99 %, y que la probabilidad de que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50 %.
- Si la ecografía predice que será mujer, ¿cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?
 - Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.
19. Un ratoncito escoge al azar uno de tres posibles laberintos. Si escoge el primero, la probabilidad de que encuentre su queso de premio es de $1/2$, si escoge el segundo la probabilidad es de $1/4$, y si escoge el tercero la probabilidad es de $1/8$. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre su queso? Si se sabe que lo encontró, ¿cuál es la probabilidad de que haya escogido el primer laberinto?
20. Sean $E_1, \dots, E_n$ eventos independientes. Pruebe que
- $$\mathbb{P}(E_1 \cup \dots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(E_i)).$$
21. Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad $2/3$ de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea C_i el evento en que el lanzamiento i resulta cara, para $i = 1, 2$. ¿Son independientes los eventos C_1 y C_2 ? Explique.
22. Sea $S = \{1, \dots, n\}$ y suponga que A y B son subconjuntos extraídos de manera independiente y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S .
- Pruebe que $\mathbb{P}(A \subseteq B) = (3/4)^n$. Indicación: condicione en la cantidad de elementos de B .
 - Pruebe que $\mathbb{P}(AB = \emptyset) = (3/4)^n$.
23. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p) . Dado $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, ¿cuál es el valor de p que maximiza $\mathbb{P}(X = k)$?
24. Se lanza un dado equilibrado con n caras numeradas de 1 a n , y se va anotando el resultado obtenido. Se continúa lanzando el dado hasta que se obtiene un resultado que ya se anotó en algún lanzamiento previo. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad total de lanzamientos. ¿Cuál es el rango de la variable? Calcule su función distribución.
25. La cantidad de accidentes que ocurren en un día en una cierta autopista es una variable de Poisson con parámetro $\lambda = 3$. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 3 ó más accidentes? ¿Cuál es esta probabilidad si se sabe que ocurrió al menos 1 accidente?
26. Una moneda con probabilidad p de cara se lanza sucesivamente hasta que se obtienen r caras. Sea X la v.a. que representa la cantidad de sellos que se obtuvieron. Calcule la función distribución de X . Indicación: si Y es la v.a. correspondiente a la cantidad total de lanzamientos, exprese el evento $\{X = k\}$ en términos de la variable Y .
27. Sea F la función de distribución acumulada de alguna variable aleatoria. Suponga que F es invertible.
- Sea X variable aleatoria tal que $F_X = F$. ¿Qué variable aleatoria es $F(X)$?
 - Sea Y variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$?
28. Sea X una variable aleatoria con densidad dada por
- $$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
- ¿Cuál es el valor de c ?
 - ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X ?
 - Calcule $\mathbb{P}(0 < X < 1/2)$.
29. El tiempo (en días) que un computador funciona antes fallar es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 1/500$. Calcule la probabilidad de que el computador funcione entre 250 y 500 días.
30. Dada una variable aleatoria no-negativa X , decimos que ella tiene la propiedad de *pérdida de memoria* si $\forall t, s > 0$ se tiene que
- $$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$
- Muestre que las variables aleatorias geométrica y exponencial poseen pérdida de memoria. Indicación: para la variable geométrica, argumente que basta probar que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ se tiene
- $$\mathbb{P}(X = m + n | X > n) = \mathbb{P}(X = m).$$
31. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dado $a \in \mathbb{R}$, muestre que
- $$\mathbb{P}(X > \mu + a) = \mathbb{P}(X < \mu - a).$$