Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniera Matemática
21 de Octubre de 2011

Auxiliar 1 MA3403: Axiomas de Probabilidad y Combinatoria

Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Angel Pardo, Alfredo Torrico.

Axiomas de Probabilidad

P1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

(a) Sean $E, F \subseteq \Omega$ pruebe que:
$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1.$$

(b) Dados $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Omega$ pruebe que:
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i) - (n-1).$$

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Considere $\{B_i : i = 1, \ldots, n\}$ una partición medible de Ω, es decir,

- $B_i \in \mathcal{F}\ \forall i = 1, \ldots, n$.
- $B_i \cap B_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$.
- $\cup_{i=1}^m B_i = \Omega$.

Pruebe que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathbb{P}(B_i) \leq \frac{1}{n}$.

P3. **(a)** Pruebe que si $\mathbb{P}(A) = 1$ entonces para todo $B \subseteq \Omega$ se tiene que A y B son independientes. Concluya que el mismo resultado se tiene en el caso que $\mathbb{P}(A) = 0$.

(b) Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una colección de sucesos relativos a un espacio muestral Ω, tales que $\mathbb{P}(A_i) = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Pruebe que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1$.

Combinatoria

P1. En un curso de 40 alumnos deben formarse tres equipos de baby fútbol (5 jugadores) y uno de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si

(a) los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?

(b) los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

P2. En un examen que consta de 10 preguntas, un estudiante debe responder exactamente 7.

(a) ¿De cuántas formas puede el estudiante escoger las preguntas?

(b) Si además se le exige que conteste al menos 3 de las primeras 5 preguntas, ¿de cuántas formas puede escoger las preguntas?

P3. Una persona tiene que escoger 5 de sus 8 amigos para irse de viaje. ¿De cuántas formas puede escoger a los amigos si

(a) dos de ellos están peleados entre sí y no irán juntos?

(b) dos de ellos van si los invitan a ambos?

P4. Preparándose para el invierno, el señor Hormiga ha comprado 7 juegos de calcetines de colores distintos (recuerde que una hormiga tiene 6 patas y por ende cada juego posee 6 calcetines). Además usted sabe que entre las hormigas es considerado formal utilizar al menos 4 calcetines del mismo color. Indique de cuántas formas se puede poner los calcetines el señor Hormiga de manera de mantenerse formal.

P5. De un grupo de n personas se elije un comité de tamaño j de entre los cuales se elige un subcomité de tamaño $i \leq j$. Obtenga una igualdad combinatorial calculando, de dos formas distintas, el número de posibles elecciones de comités y subcomités.