



CONTROL # 1

Tiempo: 3 horas

- P1.** a) (2.0 pts.) Una urna contiene n bolitas rojas y m azules. Se extraen bolitas sucesivamente hasta que se hayan obtenido r rojas, con $r \leq n$. Calcule la probabilidad de que se extraigan k bolitas en total.
- b) Sean A_1, A_2, \dots eventos de un espacio de probabilidad (Ω, P) .
- 1) (2.0 pts.) Pruebe la desigualdad de Boole:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Indicación: construya eventos disjuntos B_1, B_2, \dots tales que $B_i \subseteq A_i$ para todo $i \geq 1$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

- 2) (1.0 pto.) Pruebe que si $P(A_i) = 1$ para todo $i \geq 1$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1.$$

- 3) (1.0 pto.) Pruebe que si $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = 0.$$

- P2.** Se dispone de infinitas bolitas indistinguibles, y de $r+1$ urnas numeradas. Se comienzan a lanzar las bolitas en las urnas de manera aleatoria hasta que la urna $r+1$ acumula T bolitas, instante en el cual se detiene el experimento. Llamemos N a la variable aleatoria que denota el número total de bolitas utilizadas, y X_k a la variable aleatoria que denota el número de bolitas que quedaron en la urna $k \in \{1, \dots, r\}$.

- a) (1.5 pto.) ¿Cuál es la distribución de N ?
- b) (1.0 pto.) Suponiendo que $N = n$, ¿de cuántas formas pueden haber quedado repartidas las bolitas?
- c) (2.0 pts.) Suponiendo que $N = n$, ¿de cuántas formas pueden haber quedado repartidas las bolitas si además se sabe que $X_k \geq m_k$, para $k \in \{1, \dots, r\}$? Suponga que $T + \sum_{k=1}^r m_k \leq n$.
- d) (1.5 pto) Suponiendo que $N = n$, ¿cuál es la distribución de X_k ? ¿Cuál es la distribución de $X_1 + X_2$?

- P3.** El señor N viaja todos los días en la mañana desde su casa a la oficina, y en la tarde de vuelta a su casa. El señor N tiene un paraguas, y cuando está lloviendo se lo lleva para protegerse. Sin embargo, cuando no está lloviendo hay una probabilidad $q \in (0, 1)$ de que olvide llevarse el paraguas y lo deje en su casa u oficina, donde sea que se encuentre. Por lo tanto, es posible que un día llueva y el señor N haya dejado su paraguas en el otro lugar, en cuyo caso se mojará durante el viaje. La probabilidad que llueva un día cualquiera es $r \in (0, 1)$, independiente de los otros días; y cuando llueve, es durante todo el día. Consideremos los eventos

L_n = llueve el día n

C_n = el paraguas está en casa al comienzo del día n

M_n = el señor N se moja el día n

y llamemos $p_n = P(C_n)$. Suponga que al comienzo del día 1 el paraguas se encuentra en casa.

- a) (1.5 pts.) Describa un espacio muestral Ω adecuado para este experimento. Expresé los eventos L_n y C_n como subconjuntos de Ω .
- b) (2.5 pts.) Calcule p_n en términos de p_{n-1} , y exprese el resultado como una ecuación de la forma $p_n = \alpha + \beta p_{n-1}$, con α y β adecuados.
- c) (1.0 pto.) Encuentre una expresión explícita para p_n en términos de α y β (que no dependa de otros p_i). Calcule el límite de p_n cuando $n \rightarrow \infty$ en función de q y r .
- d) (1.0 pto.) Expresé $P(M_n)$ en función de p_n . Para $q = r = 1/2$, ¿cuál es la probabilidad que el señor N se moje cuando n es grande?