

CONTROL 1

18 de abril de 2011

Tiempo: 3 horas

P1. a) Sean E , F y G eventos en un espacio de probabilidad (Ω, \mathbb{P}) .

- 1) (1,0 pto.) Pruebe que $\mathbb{P}(E^c F^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.
- 2) (1,0 pto.) Pruebe que la probabilidad de que exactamente uno de ellos ocurra es igual a $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(EF)$.
- 3) (1,0 pto.) Pruebe que

$$\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(E^c F G) - \mathbb{P}(E F^c G) - \mathbb{P}(E F G^c) - 2\mathbb{P}(E F G).$$

- b) (3,0 ptos.) Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen n turnos de noche y n turnos de día. De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren de noche y $0 < b < n$ prefieren de día. El resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda el turno que quería.

P2. a) (3,0 ptos.) Se dispone de una moneda con probabilidad p de cara, la cual se lanza sucesivamente hasta que se acumulan m caras o m sellos, lo que ocurra primero. Sea X la cantidad total de lanzamientos realizados. ¿Cuál es el rango de la variable? Calcule su función distribución.

- b) Dadas X e Y variables aleatorias, decimos que ellas son *independientes* si para todo A y B subconjuntos de \mathbb{R} los eventos $\{X \in A\}$ e $\{Y \in B\}$ son independientes.

- 1) (1,5 ptos.) Sean $X \sim \text{geom}(p)$ e $Y \sim \text{geom}(q)$ independientes. Muestre que $\min\{X, Y\} \sim \text{geom}(p + q - pq)$. Interprete. *Indicación:* trabaje con $\mathbb{P}(X > k)$ en lugar de $\mathbb{P}(X = k)$; ídem para Y .
- 2) (1,5 ptos.) Sean $X \sim \text{bin}(n, p)$ e $Y \sim \text{bin}(m, p)$ independientes. Muestre que $X + Y \sim \text{bin}(n + m, p)$. Interprete. *Indicación:* para calcular $\mathbb{P}(X + Y = k)$, particione en los posibles resultados de X y utilice la identidad

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{n+m}{k}.$$

P3. a) Se sabe que la duración (en días) de una ampolleta de la marca A es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda_A = 0,01$, mientras que una ampolleta de la marca B tiene $\lambda_B = 0,0025$. Usted escoge al azar una ampolleta de una de estas marcas, y después de 200 días de uso ésta sigue funcionando.

- 1) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta sea de la marca B ?
- 2) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta funcione por otros 200 días?

- b) Se dispone de un cordel de largo L , el cual se corta en un punto escogido al azar (es decir, uniformemente).

- 1) (1,5 ptos.) Sea X el largo del trozo mayor. Muestre que X es una variable uniforme en el intervalo $[L/2, L]$.
- 2) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que el largo del trozo mayor sea a lo más 4 veces el largo del trozo menor?