Tarea 2 MA3401

Roberto Cortez, Joaquín Fontbona

Primavera 2011

Fecha entrega: jueves 5 de enero de 2012 en clase auxiliar.

P1. *Proceso de Poisson en* $\mathbb{R}$.

Dado $\lambda > 0$ fijo, sean $S_1, S_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, todas con ley $\exp(\lambda)$. Definimos las variables $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$ mediante $T_n := \sum_{k=1}^{n} S_k$, $\forall n \geq 1$. Para $t \in \mathbb{R}_+$ definimos la variable aleatoria N_t como

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

es decir, N_t es la cantidad de variables T_n cuya realización resultó menor o igual a t. La colección $(N_t)_{t\geq 0}$ se denomina *proceso de Poisson estándar*. Notemos que N_t, como función de t, es una función constante por pedazos, con saltos unitarios en cada T_n.

(a) Muestre que T_n es una variable Gamma de parámetros n y λ, es decir, su densidad es

$$f_{T_n}(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

donde $\Gamma(\theta) := \int_0^\infty e^{-z} z^{\theta-1} dz$ es la función Gamma, que cumple $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Indicación:* razone por inducción y utilice la convolución.

(b) Muestre que N_t es una variable de Poisson de parámetro λt. *Indicación:* dado $k \in \mathbb{N}$, note que $N_t = k$ si y sólo si $T_k \leq t < T_k + S_{k+1}$, donde T_k y S_{k+1} son independientes.

(c) La cantidad de llamadas telefónicas recibidas en una empresa durante t horas se modela mediante un proceso de Poisson estándar N_t de parámetro λ. Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. La duración de la falla es una variable exponencial de parámetro μ. Sea X la cantidad de llamadas no atendidas durante la falla.

1) Utilizando esperanzas condicionales, calcule $\mathbb{E}(X)$.
2) Para $k = 0, 1, \ldots$, calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Concluya que $X + 1$ es una variable geométrica de parámetro $p = \mu/(\lambda+\mu)$. Obtenga nuevamente $\mathbb{E}(X)$. *Indicación:* utilice la regla de probabilidades totales; para calcular la integral, construya la densidad de una variable Gamma adecuada.

P2. *La aguja de Buffon.*

Considere un piso de "parquet" consistente en bandas paralelas de madera muy largas y de ancho $a > 0$, como se muestra en la figura.

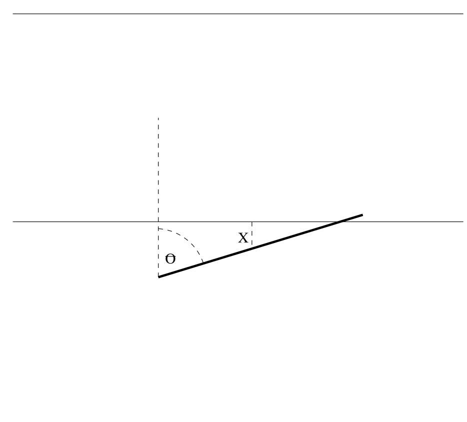

Figura 1: Esquema de la aguja.

Se lanza una aguja de largo $l \in (0, a)$ sobre el piso. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sobre dos bandas de madera? *Indicación:* suponga que la distancia X desde el centro de la aguja al momento de caer, hasta el borde de banda más cercano, se distribuye uniformemente en $[0, a/2]$. Suponga además que al caer, el ángulo θ que forma la aguja con el eje perpendicular a la dirección de las bandas se distribuye uniformemente en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y que X y θ son independientes. Escriba el evento estudiado en términos de ambas variables aleatorias y deduzca que la probabilidad de que ocurra es $\frac{2l}{\pi a}$.

P3. Sean X e Y independientes con distribución normal estándar. Definimos $U = X$ y $V = X/Y$.

(a) Muestre que la función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{|u|e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}.$$

(b) Muestre que V tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es $f_V(v) = 1/[\pi(1+v^2)]$.

P4. Sean X e Y variables aleatorias independientes con densidad diferenciable, y sean R y Θ las coordenadas polares del punto (X,Y) en el plano.

(a) Suponga que X e Y tienen distribución $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Calcule la densidad conjunta de (R,Θ) y sus respectivas densidades marginales. Concluya que $\Theta \sim \text{unif}(-\pi/2,\pi/2)$ y que R y Θ son independientes.

(b) Recíprocamente, suponga que $\Theta \sim \text{unif}(-\pi/2,\pi/2)$ y que R y Θ son independientes. Concluya que X e Y deben ser variables $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ para un σ^2 adecuado. *Indicación:* pruebe que la densidad conjunta de X e Y depende sólo de x^2+y^2, es decir, $f_{X,Y}(x,y) = g(x^2+y^2)$ para cierta función g. Muestre que

$$\frac{f_X'(x)}{2xf_X(x)} = \frac{g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$$

y concluya que el lado izquierdo debe ser constante. Concluya que $f_X(x)$ debe tener la forma deseada, y repita para $f_Y(y)$.