Profesor Héctor Olivero Q.
Auxs: Benjamín Obando & Víctor Verdugo

MA2601-2: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SOLUCIÓN P5 Y P6 CLASE AUXILIAR 4

1. Considere el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} y' &= -y^2 \\ y(0) &= y_0 > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe una solución local alrededor de $x_0 = 0$.

Solución:

Página 33 apunte Axel Osses.

2. Analice la estabilidad de los métodos de primer orden (Euler progresivo y retrógrado) para la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} y' &= -xy \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

Primero resolvamos el problema de Cauchy, que gracias al Teorema de Existencia y Unicidad sabemos que posee solución única. Calculemos el factor integrante:

$$\exp\left(\int x\ dx\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = e^{x^2/2}$$

Luego, multplicando la EDO por este factor, obtenemos que:

$$y(x) = Ce^{-x^2/2}$$

Reemplazando con el valor $x = 1$ de la condición inicial obtenemos que $C = 1$ y por lo tanto, la solución al problema de Cauchy es:

$$y(x) = e^{-x^2/2}$$

Analicemos la estabilidad asintótica para el método de Euler. En este caso, $x_0 = 0$, $x_n = nh$ e $y_n = y(x_n)$. La recurrencia para este método entonces corresponde a:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ &= y_n - hx_n y_n \\ &= y_n(1 - hx_n) \\ &= y_n(1 - nh^2) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(1 - ih^2) \end{aligned}$$

Y por lo tanto, $|y_{n+1}| = \prod_{i=1}^{n} |1 - ih^2|$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $nh^2 > 2$, es decir, $nh^2 - 1 > 1$. También sabemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_1$ se tiene que $nh^2 > 1 + \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n_0} |1 - ih^2|}$, es decir, $nh^2 - 1 > \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n_0} |1 - ih^2|}$. De esta forma, para todo $n > \text{máx}\{n_0, n_1\}$ (spg asumamos que $n_1 > n_0$) se tiene que:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}| &= \prod_{i=1}^{n} |1 - ih^2| \\ &= \prod_{i=1}^{n_0} |1 - ih^2| \prod_{j=n_0+1}^{n_1} |1 - jh^2| \prod_{k=n_1+1}^{n} |1 - kh^2| \\ &= \prod_{i=1}^{n_0} |1 - ih^2| \prod_{j=n_0+1}^{n_1} (jh^2 - 1) \prod_{k=n_1+1}^{n} (kh^2 - 1) \\ &> \prod_{i=1}^{n_0} |1 - ih^2| \cdot 1 \cdot ((n_1 + 1)h^2 - 1) \cdot \prod_{k=n_1+2}^{n} (kh^2 - 1) \\ &> \prod_{i=1}^{n_0} |1 - ih^2| \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n_0} |1 - ih^2|} \cdot \prod_{k=n_1+2}^{n} (kh^2 - 1) \\ &= \prod_{k=n_1+2}^{n} (kh^2 - 1) \\ &> 1 \end{aligned}$$

Luego y_n no converge a 0 cuando $n \to \infty$. Sin embargo, $y(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, y como lo anterior es para todo $h > 0$, podemos decir que el método de Euler progresivo es inestable para el problema de Cauchy anterior.

Ahora analizaremos la estabilidad del método de Euler retrógrado. La recurrencia en este caso viene dada por:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &= y_n - hx_{n+1}y_{n+1} \\ &= y_n - (n+1)h^2 y_{n+1} \end{aligned}$$

y por lo tanto, $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+(n+1)h^2}$. Si iteramos, obtenemos que:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}| &= \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+ih^2} \\ &< \left(\frac{1}{1+h^2}\right)^{n+1} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Como lo anterior vale para todo $h > 0$, concluimos que el método de Euler retrógrado es incondicionalmente estable para este problema de Cauchy.