Profesor Héctor Olivero Q.
Auxs: Benjamín Obando & Víctor Verdugo

MA2601-2: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
CLASE AUXILIAR 4

1. *(Desigualdad de Gronwall)* Sean $\beta, u : I \to \mathbb{R}$ continuas en I. Supongamos también que u es diferenciable en el interior de I y que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$u'(t) \leq \beta(t)u(t)$$

para todo t en el interior de I. Pruebe la desigualdad de Gronwall:

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$$

2. Consideremos la ecuación $y' = f(t, y)$, para $t \geq 0$. Supongamos que f es continua en su dominio y Lipschitz de constante L en la segunda variable, ie:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para todo $t \geq 0$ e $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Consideremos los problemas de Cauchy siguientes:

$$y' = f(t, y) \ , \quad y(0) = y_1$$

$$y' = f(t, y) \ , \quad y(0) = y_2$$

y denotemos por φ_1, φ_2 sus respectivas soluciones, definidas en un intervalo I en común. Pruebe lo siguiente:

$$|y_1 - y_2| < \varepsilon \Rightarrow |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \varepsilon e^{Lt}$$

para todo $x \in I$.

Indicación: Suponga que se satisfacen las mismas hipótesis de la pregunta 1 en β y u, con β es no negativa y α no decreciente. Además u satisface la siguiente desigualdad integral para todo $t \in I$:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds$$

Luego, se tiene la siguiente desigualdad de Gronwall, en su forma integral:

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_a^t \beta(s)ds$$

3. Considere el problema de condición inicial:

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde f es una función continua en $\mathbb{R}^2$ tal que para cierta constante $C > 0$ se cumple que

$$|f(x,y)| \leq C|y|$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. El objetivo es demostrar que la única solución para el problema anterior en el intervalo $[0,\infty)$ es $y \equiv 0$. Para ello, considere $y(x)$ solución definida en $[0,\infty)$ y defina $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x |y(s)|ds$.

a) Muestre que ψ satisface $\psi'(x) \leq C\psi(x)$, para todo $x \geq 0$.

b) Muestre que la desigualdad anterior implica que $\psi(x) \leq \psi(0)e^{Cx}$ para todo $x \geq 0$. Concluya que necesariamente $y \equiv 0$.

4. Consideremos el problema de Cauchy dado por:

$$\begin{aligned} y' &= 1 + x\sin(xy) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Pruebe que para $x \in [0,1]$ el problema de Cauchy anterior tiene solución única.

5. Considere el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} y' &= -y^2 \\ y(0) &= y_0 > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe una solución local alrededor de $x_0 = 0$.

6. Analice la estabilidad de los métodos de primer orden (Euler progresivo y retrógrado) para la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} y' &= -xy \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$