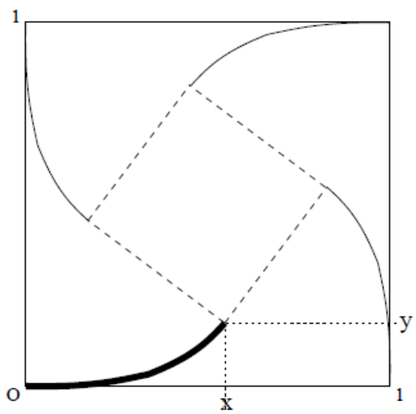
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor Héctor Olivero Q.
Auxs: Benjamín Obando & Víctor Verdugo
Semestre de Primavera 2011

MA2601-2: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
CLASE AUXILIAR 3

1. ***(Carrera de Caballos)*** Cuatro caballos parten en una carrera de las cuatro esquinas de un cuadrado de lado 1. Los caballos tienen la misma velocidad y siguen siempre al caballo siguiente en el sentido contrario a los punteros del reloj. La idea es determinar el comienzo de la curva $y = y(x)$ que describe el caballo que parte en el origen, en la esquina inferior izquierda.



   a) Suponga que $y < x$ como en la figura. Usando la simetría del problema, exprese y' en función de x e y y obtenga una EDO con condición de borde. Haciendo primero el cambio de variables $w(x) = y(1 - x)$ y luego el cambio $t = x - 1/2$, $v = w - 1/2$ encuentre la ecuación:
$$v' = \frac{t+v}{t-v}$$
   Nótese que $v' = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dw}{dx} = w'$

   b) Resuelva esta EDO y exprese finalmente la solución a la trayectoria del caballo que parte del origen en forma implícita. No olvide evaluar la constante de integración.

2. ***(La curva de persecución)*** El coyote, que inicialmente se encuentra en la posición $(c, 0)$ busca desesperadamente dar caza al correcaminos, el cual inicialmente se encuentra en el origen. Suponga que en el instante $t = 0$ ambos salen corriendo, el correcaminos con velocidad constante igual a v a lo largo del eje y (positivo) y el coyote a velocidad w constante y en dirección al correcaminos.

   a) Encuentre la trayectoria $y = f(x)$ que describe la curva de persecución.

b) Determine las condiciones sobre v y w de modo que el coyote pueda dar caza al correcaminos.

c) Suponga que en el punto de coordenadas $(0, L)$ existe un dispositivo ACME que solo puede ser accionado por el coyote si este da caza al correcaminos antes de llegar a ese punto. Una vez que el correcaminos pasa esa barrera, el coyote no puede usar su trampa. Determine condiciones sobre la velocidad w del coyote de modo que pueda accionar su trampa.

3. ***(Pesca)*** Un modelo para estudiar la población $P(t)$ de peces en el tiempo en presencia de pesca es el siguiente:
$$P' = P(1-P) - H$$
donde H representa el nivel de la pesca (constante).

a) Explique el modelo y encuentre las soluciones reales P^* constantes en función de H ¿Puede ser una, más de una o ninguna?.

b) Suponga que $H < \dfrac{1}{4}$. Haciendo el cambio de variables $P = \dfrac{1}{z} + P^*$, calcule la solución del modelo para una población inicial $P_0 > 0$ con $P_0 \neq P^*$.

4. Resuelva las siguientes EDO's (Bernoulli):

a) $xy' + y = y^{-2}$
b) $y' - 2xy = xy^3$
c) $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$

5. Resuelva las siguientes EDO's (Ricatti):

a) $y' = 2x^2 + \frac{y}{x} - 2y^2$; $y_1(x) = x$.
b) $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$; $y_1(x) = 1$.
c) $y' = (1+x)y^2 - (2x+1)y + x$; $y_1(x) = x^k$ con k por determinar.