

MA2601: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Consideremos la ecuación

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

En el caso de que $a_1(x) \neq 0$ podemos normalizar obteniendo

$$y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x)$$

Vimos en clases que esta ecuación tiene por solución

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

con

$$y_h(x) = C \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right),$$

mientras que

$$y_p(x) = \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right) \int \exp \left(\int \bar{a}_0(x) dx \right) \bar{Q}(x) dx.$$

La función y_h se conoce como solución homogénea porque corresponde a la solución de la ecuación cuando $Q(x) = 0$. Es decir

$$y'_h + \bar{a}_0(x)y_h = 0.$$

Por otro lado la función y_p corresponde a una solución particular del problema con lado derecho no nulo. En efecto:

$$\begin{aligned} y'_p &= \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right)' \int \exp \left(\int \bar{a}_0(x) dx \right) \bar{Q}(x) dx \\ &\quad + \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right) \left(\int \exp \left(\int \bar{a}_0(x) dx \right) \bar{Q}(x) dx \right)' \\ y'_p &= \underbrace{-\bar{a}_0(x) \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right) \int \exp \left(\int \bar{a}_0(x) dx \right) \bar{Q}(x) dx}_{y_p} \\ &\quad + \underbrace{\exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right) \exp \left(\int \bar{a}_0(x) dx \right)}_1 \bar{Q}(x) \\ &= -\bar{a}_0(x)y_p + \bar{Q}(x). \end{aligned}$$

De donde es directo que

$$y'_p + \bar{a}_0(x)y_p = \bar{Q}(x).$$

Ejemplo:

Considere

$$(1) \quad y' + xy = x.$$

Notemos que en este caso $\bar{Q}(x) = x$ y $\bar{a}_0(x) = x$. Entonces:

$$y_h(x) = C \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right) = C \exp \left(- \int x dx \right) = C e^{-x^2/2}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} y_p &= \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right) \int \exp \left(\int \bar{a}_0(x) dx \right) \bar{Q}(x) dx \\ &= \exp \left(- \int x dx \right) \int \exp \left(\int x dx \right) x dx \\ &= e^{-x^2/2} \int e^{x^2/2} x dx \\ &= e^{-x^2/2} \int \frac{d(e^{x^2/2})}{dx} dx \\ &= e^{-x^2/2} e^{x^2/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es fácil ver que $y_p(x) = 1$ satisface la ecuación (1). Luego la familia de soluciones de la ecuación (1) está dada por

$$y(x) = 1 + C e^{-x^2/2}.$$