MA2601-1- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Carlos Román - Andrés Zuñiga

Auxiliar 2

26 de Octubre de 2011

P1. Considere para $x > 0$ la ecuación diferencial de Riccati:

$$y' - y^2 + \frac{y}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

(a) Encuentre una solución particular de la forma $y_p(x) = ax^b$.

(b) Encuentre la solución general.

P2. ***(Ley de Hooke)*** Considere un sistema compuesto por un resorte de constante elástica k, cuyo extremo izquierdo está fijo, mientras que el extremo derecho se encuentra amarrado a un cuerpo de masa m. La ley de Hooke establece que:

"Para pequeños desplazamientos en torno a la posición de equilibrio, la fuerza de restitución del resorte es proporcional al desplazamiento".

La ecuación que modela este sistema es: $m \cdot \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = -k \cdot y$, donde y representa el desplazamiento del resorte respecto a su punto de equilibrio. Resuelva la EDO utilizando un cambio de variable apropiado, que permita obtener una EDO de primer orden.

P3. Resuelva las siguientes EDOs

(a) $y' - \dfrac{3x^2y}{y + x^3} = 0$

Hint: Considere el cambio de variables $y = z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ a econtrar, de manera que la EDO resultante sea homogénea.

(b) $x^2y' - 2xy = 3y^4$

P4. Un líquido contaminado es vaciado a un contenedor de volumen fijo V a una tasa de $a\left[\frac{lt}{seg}\right]$. La concentración de contaminante es una constante $q\left[\frac{gr}{lt}\right]$. Denote por $y(t)$ la masa total del contaminante en el tanque en el tiempo t. Suponga que ciertas reacciones químicas que ocurren en el tanque neutralizan el contaminante, el cual decrece a una tasa de $by(t)$. El fluido tratado sale del contenedor a una tasa de $a\left[\frac{lt}{seg}\right]$. Suponga que $a, b, V, q > 0$ son constantes, y que la solución siempre está perfectamente mezclada.

(a) Encuentre una ecuación diferencial ordinaria para y.

(b) Resuelva la ecuación suponiendo que $y(0) = y_0 \geq 0$.

P5. Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) & x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde I es un intervalo simétrico que contiene al cero, f es impar en la variable x (esto es, $\forall x \in I, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(-x, y) = -f(x, y)$) y globalmente Lipschitziana en la segunda variable. Demostrar que la solución al problema es par.

P6. **(a)** Muestre que la función $f(y) = y^{2/3}$ no satisface la condición de Lipschitz cerca del origen.

Hint: Utilice el *Teorema del Valor Medio*.

(b) Encuentre una solución no nula del problema

$$y' = y^{2/3},\ y(0) = 0$$

Observe que la función nula es también solución. Combinando estas soluciones, demuestre que este problema admite dos soluciones diferentes.