MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Francisco Collarte - Andrés Zúñiga

Clase Auxiliar 3

Teorema de existencia y unicidad para EDO's

P1.- Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x,y),\ x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo simétrico que contiene al cero, f es impar en la primera variable (ie, $f(-x,y) = -f(x,y)$) y globalmente Lipschitziana en la segunda variable.
Demuestre que la solución a este problema es una funcion par.

P2.- Encuentre una solución $y_1(x)$ no constante en el intervalo $[0,\pi]$ del problema con condición inicial

$$y' + \sqrt{1-y^2} = 0\ , \quad y(0) = 1$$

Verifique que $y_2(x) \equiv 1$ también es una solución de este problema. ¿Contradice este hecho el teorema de existencia y unicidad?

P3.- Considere el problema de Cauchy para $a > 0$

$$(PC)\begin{cases} y' = (1+\sin^2(xy))y^2 + 1, \quad x \in]-a,a[\\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) Pruebe que la solución de este problema es impar.

b) Pruebe que necesariamente $a \leq \frac{\pi}{2}$

P4.- Considere el siguiente PVI

$$(PC)\begin{cases} ty' - y = t^2\cos(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

a) Encuentre la solución general y bosqueje alguna de sus soluciones.

b) Muestre que el PVI no tiene solución, y explique porqué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad.

P5.- **Estabilidad de esquemas numéricos**
Suponga que se quiere aproximar la solución de un problema de Cauchy de primer orden

$$(PC)\begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)),\ x \in [x_0,+\infty) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Para ello discretizemos con $h > 0$ el dominio de la ecuación, de la forma

$$[x_0, +\infty) = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \qquad \text{donde } x_n = x_0 + nh,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Y llamamos y_n al valor de la aproximación entregada por el método en el punto x_n. A grandes rasgos, un método es *estable* cuando los valores de la solución que éste entrega se mantienen cerca de la curva integral que se pretende aproximar. Es decir, si el error e_n que se genera es pequeño. Existen diferentes criterios de estabilidad, pero estamos interesados en la "estabilidad asintótica", que tiene que ver con el comportamiento a largo plazo.

a) Defina matemáticamente cuándo un método de aproximación es *condicionalmente estable*, *incondicionalmente estable* e *inestable*.

b) Para $a, y_0 > 0$ considere el siguiente PVI

$$(P_1) \begin{cases} y'(x) = -ay(x),\ x \in [0, +\infty) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Estudie la *estabilidad* de los métodos de Euler progresivo y Euler retrógrado.