

MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**Profesor:** Axel Osses**Auxiliares:** Carlos Román- Andrés Zúñiga

Clase de Repaso Auxiliar 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

P1.- a) Muestre que una ecuación diferencial de la forma

$$y'(x) = f(ax + by + c) \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } f \text{ es regular}$$

se puede reducir a una ecuación de variables separables.

b) Usando lo anterior, resuelva:

$$y'(x) - e^{\pi x} \left(e^{y(x)} \right)^2 = -\frac{\pi}{2}$$

P2.- Sean y_1 e y_2 soluciones distintas de la ecuación de Riccati:

$$y'(x) + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

donde $p, q, r \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ funciones dadas. Suponiendo que $y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, demuestre que toda otra solución $y(x)$ satisface

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C \cdot e^{\int p(x)(y_2 - y_1) dx} \quad \text{donde } C \in \mathbb{R}$$

P3.- Resuelva el siguiente (PVI) no lineal

$$y'(x) = \frac{2 \cos^2(x) - \sin^2(x) + y^2}{2 \cos(x)}, \quad y(0) = -1$$

sabiendo que $y_1(x) = \sin(x)$ es solución de la ecuación de Riccati.

P4.- Resuelva los siguientes problemas de valor inicial, usando el método que corresponda

a) $x \cdot y'(x) - y(x) \cdot (\ln(y) + 1 - \ln(x)) = 0, \quad y(1) = e.$

b) $y''(x) = e^{y(x)}(xy'(x) + 1), \quad y(0) = y'(0) = 0.$

c) $3(1 + x^2)y'(x) = 2xy(y^3 - 1), \quad y(1) = 1$

d) $\sqrt{y(x)} \cdot y'(x) + y^{3/2}(x) = 1, \quad y(0) = 4.$

P5.- a) Considere una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$y''(t) + f(y(t)) = 0 \quad (1)$$

donde $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua y no negativa. Sea $y(t)$ una solución de (1) definida en un intervalo semiabierto $[0, T[$. Suponga que el siguiente número es finito

$$A \equiv \int_{y(0)}^{\infty} f(s) ds < +\infty$$

y que $y'(0) > \sqrt{2A}$. Muestre que $y'(t) > 0$ para todo $t \in [0, T[$.

b) Un cohete es lanzado en una cierta dirección radial $\hat{r}$ desde la superficie de la Tierra.

Si $r(t)$ es la distancia al centro de la Tierra, y $\vec{a}(t)$ es la aceleración del cohete, entonces la ecuación que describe el movimiento del cohete bajo el efecto de la gravedad y en ausencia de otras fuerzas está dada por

$$\vec{a}(t) = -\frac{gR^2}{r^2(t)} \hat{r}$$

donde R es el radio de la Tierra y $g > 0$ es una constante universal. Se le pide demostrar la siguiente afirmación: “Si la velocidad inicial v_0 satisface $v_0 > \sqrt{2gR}$, entonces el cohete *nunca* regresa a la Tierra. Este último número es llamado *velocidad de escape*.”

P6.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ una función continua, tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ es también continua. Suponga que f es periódica de período 1 en su primera variable, esto es,

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R}^2 : f(t+1, y) = f(t, y)$$

Suponga que $y = \phi(t)$ es una solución en todo $\mathbb{R}$ de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad \phi(1) = \phi(0)$$

Demuestre que $\phi(\cdot)$ es periódica de período 1, es decir, $\phi(t+1) = \phi(t), \forall t \in \mathbb{R}$.