Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
21 de octubre de 2011

Auxiliar #1 MA2002: Campos y Operadores Vectoriales

Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Luís Fredes, Pedro Pérez.

Identidades Vectoriales

P1. Sea un campo vectorial $\overrightarrow{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ y un campo escalar $f,\ g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\ \to\mathbb{R}$ (suficientemente diferenciables).

1.1 Pruebe las siguientes identidades.

a) $\nabla(fg)=f\cdot\nabla g+g\cdot\nabla f$.
Observando cada componente del gradiente tenemos: $\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)=f\frac{\partial}{\partial x_i}g+g\frac{\partial}{\partial x_i}f$, Luego identificamos que $\nabla(f)=(\frac{\partial}{\partial x_i}f)_i$; $\nabla(g)=(\frac{\partial}{\partial x_i}g)_i$ de donde se concluye.

b) $div(f\overrightarrow{F})=\nabla f\cdot\overrightarrow{F}+fdiv(\overrightarrow{F})$.
Tenemos que $div(f\overrightarrow{F})=\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x_i}(f\overrightarrow{F}_i)=\sum_{i=1}^3\{\overrightarrow{F}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(f)+f\frac{\partial}{\partial x_i}(\overrightarrow{F}_i)\}=\sum_{i=1}^3\overrightarrow{F}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(f)+f\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x_i}(\overrightarrow{F}_i)=\nabla f\cdot\overrightarrow{F}+fdiv(\overrightarrow{F})$

c) $rot(f\overrightarrow{F})=\nabla f\times\overrightarrow{F}+frot(\overrightarrow{F})$.
Aquí usaremos la notación dada por el profe:

$$rot(f\overrightarrow{F})=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(f\overrightarrow{F}_j)\widehat{e}_k=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(f\overrightarrow{F}_j)\widehat{e}_k=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\{\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\overrightarrow{F}_j+f\frac{\partial}{\partial x_i}(\overrightarrow{F}_j)\}\widehat{e}_k$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\overrightarrow{F}_j\widehat{e}_k+f\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overrightarrow{F}_j)\widehat{e}_k=\nabla f\times\overrightarrow{F}+frot(\overrightarrow{F})$$

d) $\Delta(fg)=f\Delta(g)+g\Delta(f)+2\nabla f\cdot\nabla g$.
Recordemos que $\Delta(fg)=div(\nabla(fg))$, entonces de las formulas anteriores a) y b)
$\Delta(fg)=div(\nabla(fg))=div(f\cdot\nabla g+g\cdot\nabla f)=div(f\cdot\nabla g)+div(g\cdot\nabla f)=\nabla f\cdot\nabla g+fdiv(\nabla g)+\nabla f\cdot\nabla g+gdiv(\nabla g)=f\Delta(g)+g\Delta(f)+2\nabla f\cdot\nabla g$

e) $rot(\nabla f)=0$.
Usando la notación del profe $rot(\nabla f)=\sum_{i,j,k=1}^3\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}((\nabla f)_j)\widehat{e}_k=\sum_{i,j,k=1}^3\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}((\nabla f)_j)\widehat{e}_k$
Donde sabemos que $(\nabla f)_j=\frac{\partial}{\partial x_j}(f)$, luego
$rot(\nabla f)=\sum_{k=1}^3\{\sum_{i,j=1}^3\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f\}\widehat{e}_k$ por ultimo notando que para k fijo $(\varepsilon_{ijk})_{i,j}$ es antisimétrico y $(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f)_{i,j}$ es simétrico tenemos que $\sum_{i,j=1}^3\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f=0$ para $k=1,2,3$ de donde concluimos el resultado.

1.2 Determine Δf en coordenadas esféricas.

$$\Delta f=div(\nabla f)=div(\frac{\partial}{\partial r}f\widehat{r}+\frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\theta}f\widehat{\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}f\widehat{\varphi})$$

$$=\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{\partial r}(f)r^2\sin(\varphi))+\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\theta}(f)r)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(f)r\sin(\varphi))]$$

$$=\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{\partial r}(f)r^2\sin(\varphi))+\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\theta}(f)r)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(f)r\sin(\varphi))]$$

$$=\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[2r\frac{\partial}{\partial r}(f)\sin(\varphi)+\sin(\varphi)r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}f+\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f+\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}f+\sin(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}f]$$

$$= \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[2r\frac{\partial}{\partial r}(f)\sin(\varphi)+\sin(\varphi)r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}f]+\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f]+\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}f+\sin(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}f]$$

$$= \frac{1}{r}[2\frac{\partial}{\partial r}(f)+r\frac{\partial^2}{\partial r^2}f]+\frac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f]+\frac{\cos(\varphi)}{r^2\sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial\varphi}f]+\frac{1}{r^2}[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}f]$$

Campos Vectoriales Centrales

P2. Sea un campo vectorial $\overrightarrow{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de clase C^1, se dice central si es radial y sólo depende de la distancia al origen, esto es si el campo se puede escribir en coordenadas esféricas como

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r})=\phi(r)\widehat{r}$$

para alguna $\phi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ de clase C^1

2.1 Muestre que todo campo central $\overrightarrow{F}$ es irrotacional, i.e. $rot(\overrightarrow{F})=0$
Usando la expresión como determinante del rotor en coordenadas esféricas tenemos $rot(\overrightarrow{F})=\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial\varphi}(0)-\frac{\partial}{\partial\theta}(0)]\widehat{r}+\frac{1}{r\sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\phi(r))-\frac{\partial}{\partial r}(0)]\widehat{\varphi}+\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(0)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(\phi(r))]\widehat{\theta}=0$

2.2 Verifique que si $\overrightarrow{F}(r)=\phi(r)\widehat{r}$ entonces

$$div(\overrightarrow{F})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)r^2)$$

Usado la formula para la divergencia en coordenadas esféricas, tenemos $div(\overrightarrow{F})=\frac{1}{r^2\sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)r^2\sin(\varphi))+\frac{\partial}{\partial\theta}(0)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(0)]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)r^2)$ Deduzca que el campo es solenoidal (i.e divergencia idénticamente nula) en $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ si y sólo si

$$\overrightarrow{F}(r)=\frac{K}{r^2}\widehat{r}\text{ con }K\in\mathbb{R}$$

($\Rightarrow$). Tenemos $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)r^2)=0\Rightarrow$ (resolviendo la EDO) $\phi(r)=\frac{K}{r^2}\Rightarrow\overrightarrow{F}(r)=\frac{K}{r^2}\widehat{r}$ con $K\in\mathbb{R}$
($\Leftarrow$) Remplazamos en 2.2 y derivamos $div(\overrightarrow{F})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{K}{r^2}r^2)=0$

2.3 Concluya que todo campo central solenoidal admite un potencial de la forma

$$V(r)=\frac{K}{r}+C\text{ donde }K,C\in\mathbb{R}$$

Basta comprobar que $\overrightarrow{F}=-\nabla V$ lo que es simplemente calcular el gradiente en coordenadas esféricas.

Problema 1.2 del apunte

P3. Sea $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una función de clase C^1.

3.1 Demuestre que

$$rot\int_a^b\varphi(\overrightarrow{r},t)dt=\int_a^b rot\varphi(\overrightarrow{r},t)dt \tag{1}$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $\int_a^b\varphi(\overrightarrow{r},t)dt=\int_a^b\frac{\partial}{\partial u}\varphi(\overrightarrow{r},t)dt$
Definamos $\overrightarrow{G}(\overrightarrow{r})=\int_a^b\varphi(\overrightarrow{r},t)dt$, entonces calculamos su rotor usando la formulas de tensores (revisar material docente)
$rot(\overrightarrow{G})=\sum_{i,j,k=1}^3\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\overrightarrow{G}_j\widehat{e}_k=\sum_{i,j,k=1}^3\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\overrightarrow{G}_j\widehat{e}_k=\sum_{i,j,k=1}^3\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(\int_a^b\varphi(\overrightarrow{r},t)_jdt)\widehat{e}_k=\sum_{i,j,k=1}^3\varepsilon_{ijk}(\int_a^b\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\overrightarrow{r},t)_jdt)\widehat{e}_k$(Aqui usamos la indicación), entonces usando la linealidad

de la integral.
$rot(\overrightarrow{G}) = \int_a^b [\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\overrightarrow{r}, t)_j \widehat{e}_k] dt$ Aquí vemos que

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\overrightarrow{r}, t)_j \widehat{e}_k = rot(\varphi(\overrightarrow{r}, t))$$

Con lo cual tenemos lo pedido.

3.2 Considere el campo vecorial $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = g(r)\widehat{\theta}$, expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\overrightarrow{r}\|$ y g es una función escalar de clase C^1. Verifique que $div(\overrightarrow{F}) = 0$ y pruebe que:

$$rot(\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) \times t\overrightarrow{r}) = 2t\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) + t^2 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) \tag{2}$$

Primero notemos que (en coordenadas esféricas) es $div(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{\partial}{\partial \theta}(g(r)) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(0)] = 0$.
Usemos la formula del determinante para calcular este rotor en coordenadas esféricas.
$rot(\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) \times t\overrightarrow{r}) = rot(g(tr)rt\widehat{\varphi}) = \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial \varphi}(0) - \frac{\partial}{\partial \theta}(g(tr)r^2 t)]\widehat{r} + \frac{1}{r \sin(\varphi)}[\frac{\partial}{\partial \theta}(0) - \frac{\partial}{\partial r}(0)]\widehat{\varphi} + \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(g(tr)r^2 t) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\phi(0))]\widehat{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(g(tr)r^2 t) = \frac{1}{r}[2rtg(tr) + r^2 tg'(rt)t]\widehat{\theta} = 2tg(tr)\widehat{\theta} + t^2 \frac{d}{dt} g(tr)\widehat{\theta} = 2t\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) + t^2 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r})$

3.3 Sea ahora campo cualquiera que satisface $div(\overrightarrow{F}) = 0$ en la $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Entonces se puede probar que (2) es válida en $B(0,1)$. Definamos el campo vectorial $\overrightarrow{G}(\overrightarrow{r}) = \int_0^1 [\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) \times t\overrightarrow{r}] dt$. Usando lo anterior concluya que $rot(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}$ en $B(0,1)$
Sea $\overrightarrow{r} \in B(0,1)$ entonces
$rot(\overrightarrow{G}) = rot \int_0^1 \varphi(\overrightarrow{r}, t) dt = \int_0^1 rot\varphi(\overrightarrow{r}, t) dt = \int_0^1 2t\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) + t^2 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) dt$ ($\clubsuit$) Donde ocupamos la formula pues $t\overrightarrow{r} \in B(0,1)\ \forall t \in [0,1]$
Ahora integrando por partes la expresion $\int_0^1 2t\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) dt$ tenemos

$$\int_0^1 2t\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) dt = [t^2 F(t\overrightarrow{r})]_0^1 - \int_0^1 t^2 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) dt = F(\overrightarrow{r}) - \int_0^1 t^2 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) dt$$

Remplazando en ($\clubsuit$) tenemos $rot(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}$ en $B(0,1)$

Problema 1.3 del apunte

P4. Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencia de un campo gravitacional.

$$\rho \nabla \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} + \nabla p = -\rho g \widehat{k}$$

- Pruebe que para el caso de un flujo irrotacional e incomprensible (ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli.

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = cte$$

indicación: utilice la igualdad vectorial del apunte

$$\nabla(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F}) = 2\nabla\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F} + 2\overrightarrow{F} \times rot(\overrightarrow{F})$$

De la identidad y como el flujo es irrotacional tenemos

$$\nabla\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\nabla(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F})$$

Aquí remplazamos en la ecuación y tenemos

$$\nabla(\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2))\nabla p = -\rho g \widehat{k}$$

Por ultimo notemos que

$$\nabla(\rho g z) = \rho g \widehat{k}$$

Luego remplazando en la ecuación

$$\nabla(\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z) = 0$$

de donde se concluye que

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = cte$$