Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
21 de octubre de 2011

Auxiliar #1 MA2002: Campos y Operadores Vectoriales

Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Luís Fredes, Pedro Pérez.

Identidades Vectoriales

P1. Sea un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y un campo escalar $f,\ g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \ \to \mathbb{R}$ (suficientemente diferenciables).

1.1 Pruebe las siguientes identidades.

a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

b) $div(f\overrightarrow{F}) = \nabla f \cdot \overrightarrow{F} + f div(\overrightarrow{F})$.

c) $rot(f\overrightarrow{F}) = \nabla f \times \overrightarrow{F} + f rot(\overrightarrow{F})$.

d) $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2\nabla f \cdot \nabla g$.

e) $rot(\nabla f) = 0$.

1.2 Determine Δf en coordenadas cilíndricas.

Campos Vectoriales Centrales

P2. Sea un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, se dice central si es radial y sólo depende de la distancia al origen, esto es si el campo se puede escribir en coordenadas esféricas como

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \phi(r)\widehat{r}$$

para alguna función $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1

2.1 Muestre que todo campo central $\overrightarrow{F}$ es irracional, i.e. $rot(\overrightarrow{F}) = 0$

2.2 Verifique que si $\overrightarrow{F}(r) = \phi(r)\widehat{r}$ entonces

$$div(\overrightarrow{F}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)r^2)$$

Deduzca que el campo es solenoidal (i.e divergencia idénticamente nula) en $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ si y sólo si

$$\overrightarrow{F}(r) = \frac{K}{r^2}\widehat{r} \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

2.3 Concluya que todo campo central solenoidal admite un potencial de la forma

$$V(r) = \frac{K}{r} + C \text{ donde } K, C \in \mathbb{R}$$

Problema 1.2 del apunte

P3. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1.

3.1 Demuestre que

$$rot \int_a^b \varphi(\overrightarrow{r}, t)dt = \int_a^b rot\varphi(\overrightarrow{r}, t)dt \tag{1}$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b \varphi(\overrightarrow{r}, t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\overrightarrow{r}, t)dt$

3.2 Considere el campo vectorial $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = g(r)\widehat{\theta}$, expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\overrightarrow{r}\|$ y g es una función escalar de clase C^1. Verifique que $div(\overrightarrow{F}) = 0$ y pruebe que:

$$rot(\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) \times t\overrightarrow{r}) = 2t\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) + t^2 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) \tag{2}$$

3.3 Sea ahora campo cualquiera que satisface $div(\overrightarrow{F}) = 0$ en la $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Entonces se puede probar que (2) es válida en $B(0,1)$. Definamos el campo vectorial $\overrightarrow{G}(\overrightarrow{r}) = \int_0^1 [\overrightarrow{F}(t\overrightarrow{r}) \times t\overrightarrow{r}]dt$. Usando lo anterior concluya que $rot(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}$ en $B(0,1)$

Problema 1.3 del apunte

P4. Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencia de un campo gravitacional.

$$\rho \nabla \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} + \nabla p = -\rho g \widehat{k}$$

- Pruebe que para el caso de un flujo irrotacional e incomprensible (ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli.

  $$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = cte$$

  indicación: utilice la igualdad vectorial del apunte

  $$\nabla(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F}) = 2\nabla\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F} + 2\overrightarrow{F} \times rot(\overrightarrow{F})$$