Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matematica
3 de noviembre de 2011

Auxiliar #3 MA2002: Aplicaciones del Teorema de Gauss e Integral de trabajo

Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Luís Fredes, Pedro Pérez.

Ejemplos de aplicaciones del Teorema de Gauss

P1. a) **Ley de Arquímedes:** Dado un liquido en reposo se tiene que la presión esta dada por la expresión

$$P = -\rho g z$$

Donde $-\rho$ es la densidad del liquido, g es la gravedad y z es la profundidad del liquido.

a.1) Sea Ω un volumen de un liquido, (supondremos que satisface las hipótesis del teorema de la divergencia de Gauss). Entonces demuestre que

$$\overrightarrow{F}(\text{resultante}) = \overrightarrow{F}_r := \int_{\partial\Omega} (-\rho g z) \cdot \widehat{n} dS$$

a.2) Concluya que

$$\overrightarrow{F}_r \cdot \widehat{k} = -gM(\text{Masa Total del Volumen } \Omega\ )$$

b) **Ley de Conservación de la masa:** Para un fluido sea $\rho(\overrightarrow{r}, t)$, $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t)$ la densidad de masa y la velocidad en las coordenadas $\overrightarrow{r}$ y en el tiempo t respectivamente (que las supondremos de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$.

b.1) Demuestre que $div(\rho\overrightarrow{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0$, para esto note que

$$\text{Flujo de Masa que sale de } \Omega \text{ en un tiempo t } = \int_{\partial\Omega} (\rho\overrightarrow{v}) \cdot \widehat{n} dS$$

y ademas la masa del Volumen en un tiempo esta dado por

$$M(\Omega)(t) := \int_{\Omega} \rho(\overrightarrow{r}, t) dV$$

c) Calcule el flujo de un campo eléctrico $\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\widehat{r}$, sobre el manto del cilindro infinito $x^2+y^2 = a^2$.

Problema 2.2 del apunte

P2. Considere el campo vectorial dado en coordenada cilíndricas por

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho}\widehat{\rho} + e^{-\theta^2}\widehat{k}$$

a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\overrightarrow{F}$ y verifique que $div(\overrightarrow{F}) = 0$

b) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ dad por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Calcule el flujo a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera.

Campos Conservativos

P3. Sea $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diremos que el campo $\overrightarrow{F}$ es **conservativo** si y solo si $(\forall \mathcal{C}$ curva regular y cerrada $\subseteq \Omega)(\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0)$

a) Demuestre que si $\overrightarrow{F}$ admite un potencial (i.e $\overrightarrow{F} = \nabla\varphi$) entonces $\overrightarrow{F}$ es conservativo.

b) Demuestre que si $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es conservativo entonces $\overrightarrow{F}$ admite un potencial y este esta dado por $\varphi(x) := \int_{[0,x]} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$. Concluya que $rot(\overrightarrow{F}) = 0$.

Integral de Trabajo

P4. a) Sea $\overrightarrow{F}(x, y) := (2x + y^2, 3y - 4x)$ calcule la integral de trabajo sobre la lenteja formada por las ecuaciones $x = y^2$, $y = x^2$.

b) **Curvas cuadráticas de Bézier** Una curva de grado n de Bézier en los puntos $\{P_i : i = 0, ..., n\}$es el camino trazado por la función $\overrightarrow{r}(t) := \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k (1-t)^{n-k} t^k \ t \in [0, 1]$. Determine el trabajo realizado por $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ por la curva de Bézier para los puntos en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es decir $\overrightarrow{r}(t) := ((1-t)^2, 2t(1-t), t^2)$.