

Método "epsilon-delta" para operadores diferenciales e identidades básicas

Raúl Gormaz

October 16, 2011

1 El tensor (o el delta) de Kroneker: δ_{ij}

No nos extendamos nuevamente sobre lo ya visto en clase, y solo recordemos que $\delta_{ij} = 1$ solo si $i = j$ y es nulo en todo otro caso. Corresponde al elemento (i, j) de la matriz identidad. Como trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, los índices van solo de 1 a 3.

Importante, el δ se relaciona con el producto interno (o punto) por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i \quad (1)$$

Nótese que se utiliza la convención de Einstein para la suma sobre índices repetidos.

2 El tensor de Levi-Civita: ε_{ijk}

Este tensor se relaciona estrechamente con otro producto, el producto cruz. También con el determinante. Una forma de definirlo es recordando el producto cruz entre vectores de la base canónica. Los coeficientes de este tensor permiten escribir la combinación lineal de cada producto cruz de vectores canónicos. Los valores ε_{ij1} , ε_{ij2} y ε_{ij3} son los coeficientes de la combinación lineal que genera $\hat{e}_i \times \hat{e}_j$. Esto es:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ij1} \hat{e}_1 + \varepsilon_{ij2} \hat{e}_2 + \varepsilon_{ij3} \hat{e}_3 = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (\text{se suma sobre } k) \quad (2)$$

Por ejemplo

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 = \underbrace{0}_{\varepsilon_{121}} \hat{e}_1 + \underbrace{0}_{\varepsilon_{122}} \hat{e}_2 + \underbrace{1}_{\varepsilon_{123}} \hat{e}_3 = \varepsilon_{12k} \hat{e}_k$$

O también

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = \vec{0} = \underbrace{0}_{\varepsilon_{221}} \hat{e}_1 + \underbrace{0}_{\varepsilon_{222}} \hat{e}_2 + \underbrace{0}_{\varepsilon_{223}} \hat{e}_3 = \varepsilon_{22k} \hat{e}_k$$

El producto cruz general resulta del siguiente cálculo.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_i \hat{e}_i) \times (b_j \hat{e}_j) = a_i b_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k \quad (3)$$

El tensor de Levi-Civita tiene las siguientes propiedades evidentes.

Es antisimétrico, esto es, cambia de signo si permutamos de orden 2 de sus índices.

Por ejemplo, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$

De esto se deduce que es obligatoriamente nulo si al menos dos índices son iguales. En efecto, permutar esos índices repetidos deja los índices iguales, pero cambia el signo.

Este tensor también se relaciona con el determinante (de 3×3). Recordemos para esto la fórmula, que es una alternativa para (3):

$$\vec{b} \times \vec{c} = \det \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i b_j c_k \quad (\text{notar que } \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki})$$

de donde, reconociendo términos, se obtiene que

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

Aplicaciones de esta relación del tensor de Levi-Civita con el determinante, pueden entregarnos identidades obvias, y otras no tanto. Una lista de algunas de estas propiedades que pueden verificarse directamente (en el fondo, los ε_{ijk} son solamente 27 valores tomados en $\{1, -1, 0\}$, es decir, solo un número finito de casos a verificar).

$$\varepsilon_{123} = 1 \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} = \varepsilon_{123} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{\ell i}\delta_{mj}\delta_{nk} = \varepsilon_{lmn} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell jk} = 2\delta_{i\ell} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad (9)$$

De estas, la (4) ya la vimos, las (5) y (6) son evidentes (eliminando todos los valores nulos del tensor δ_{ij}). Las propiedades (8) y (9) se desprenden rapidamente de (7). En resumen, la única que realmente requiere trabajo probar es la (7), y esta relación es muy útil. Para los interesados, al final se incluye un esquema de demostración que no requiere verificar todos los casos posibles (Notese que como se suma sobre k , los casos son 3 para i , 3 para j , 3 para ℓ y 3 para m , lo que da un total de solo 81 casos a verificar).

3 Una última astucia práctica

Si a_{ij} es una expresión simétrica de sus índices (i.e. $a_{ij} = a_{ji}$) y b_{ij} es una expresión antisimétrica (i.e. $b_{ij} = -b_{ji}$) entonces $a_{ij}b_{ij} = 0$ (notar la doble sumatoria). Se prueba que $a_{ij}b_{ij} = -a_{ij}b_{ij}$ y ya!

Por ejemplo $\varepsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$, o mas interesante, para un campo φ de clase C^2 , $\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = 0$.

Con esto, quedamos equipados para calcular cualquier expresión del tipo de las que aparecen en las páginas 7–8 del apunte (1.2.2. Identidades vectoriales). Probaré tres de ellas para entrar en confianza. Ustedes ataquen el resto. Es importante que entiendan que propiedad se aprovecha en cada paso, para que luego puedan probar las otras identidades por su cuenta.

Ejemplo 3 de la lista del apunte. Fijarse que se indica que todos los

campos utilizados son "suficientemente diferenciable".

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) &= \operatorname{div}(\nabla \times \vec{F}) \\
 &= \operatorname{div}(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{e}_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_i} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7 de la lista del apunte.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \operatorname{div}(\varepsilon_{ijk} F_i G_j \hat{e}_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} (F_i G_j) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} G_j + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial G_j}{\partial x_k} F_i \\
 &= \varepsilon_{kij} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} G_j - \varepsilon_{kji} \frac{\partial G_j}{\partial x_k} F_i \\
 &= \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{G} - \operatorname{rot}(\vec{G}) \cdot \vec{F}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 12 de la lista del apunte. Este corresponde a la máxima dificultad. Aprovechen de hacer el intento de desarrollarlo con sus conocimientos previos (es decir, sin ε_{ijk}). Comparen así la cantidad de trabajo (y de tinta) de cada método, y esto sin considerar que la probabilidad de error crece con el tamaño de las expresiones obtenidas. En este ejemplo se utilizara la útil relación (7) de mas arriba.

$$\begin{aligned}
\text{rot } (\vec{F} \times \vec{G}) &= \nabla \times (\varepsilon_{ijk} F_i G_j \hat{e}_k) \\
&= \varepsilon_{lkm} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\varepsilon_{ijk} F_i G_j) \hat{e}_m \\
&= -\varepsilon_{lmk} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\varepsilon_{ijk} F_i G_j) \hat{e}_m \\
&= (-\delta_{li} \delta_{mj} + \delta_{lj} \delta_{mi}) \frac{\partial}{\partial x_\ell} (F_i G_j) \hat{e}_m \\
&= -\delta_{li} \delta_{mj} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (F_i G_j) \hat{e}_m + \delta_{lj} \delta_{mi} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (F_i G_j) \hat{e}_m \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i} (F_i G_j) \hat{e}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (F_i G_j) \hat{e}_i \\
&= -\frac{\partial F_i}{\partial x_i} G_j \hat{e}_j - \frac{\partial G_j}{\partial x_i} F_i \hat{e}_j + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} G_j \hat{e}_i + \frac{\partial G_j}{\partial x_j} F_i \hat{e}_i \\
&= -\text{div } (\vec{F}) \vec{G} + \text{div } (\vec{G}) \vec{F} - \frac{\partial G_j}{\partial x_i} F_i \hat{e}_j + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} G_j \hat{e}_i \\
&= -\text{div } (\vec{F}) \vec{G} + \text{div } (\vec{G}) \vec{F} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial x_i} F_i + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_j} G_j
\end{aligned}$$

Con esto, podemos considerar que el cálculo ya esta hecho pero la notación del apunte es diferente. Analicemos en detalle y comparemos lo obtenido para el penúltimo término.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{G}}{\partial x_i} F_i &= \frac{\partial \vec{G}}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x_2} F_2 + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x_3} F_3 \\
&= \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial G_1}{\partial x_2} F_2 + \frac{\partial G_1}{\partial x_3} F_3, \frac{\partial G_2}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} F_2 + \frac{\partial G_2}{\partial x_3} F_3, \frac{\partial G_3}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial G_3}{\partial x_2} F_2 + \frac{\partial G_3}{\partial x_3} F_3 \right) \\
&= (\vec{F} \cdot \nabla G_1, \vec{F} \cdot \nabla G_2, \vec{F} \cdot \nabla G_3) \\
&= \vec{F} \cdot (\nabla G_1) \hat{e}_1 + \vec{F} \cdot (\nabla G_2) \hat{e}_2 + \vec{F} \cdot (\nabla G_3) \hat{e}_3
\end{aligned}$$

Que corresponde a la fórmula del apunte para ese término. Para el último término es "la misma cosa".

4 La demostración (sin comentarios) para la séptima fórmula

Para una demostración que evite los 81 casos, se utilizan astutamente las propiedades del determinante. En especial, 2 propiedades son requeridas. Si A y B son matrices de 3 por 3 (no requerimos mayor tamaño) sabemos que (1) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ y (2) $\det(A) = \det(A^T)$. También que el elemento (ij) del producto de matrices se calcula como multiplicando la fila i con la columna j , lo que en notación de suma de Einstein se dice $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

Aquí va el cálculo final:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{1\ell} & \delta_{1m} & \delta_{1k} \\ \delta_{2\ell} & \delta_{2m} & \delta_{2k} \\ \delta_{3\ell} & \delta_{3m} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{1\ell} & \delta_{1m} & \delta_{1k} \\ \delta_{2\ell} & \delta_{2m} & \delta_{2k} \\ \delta_{3\ell} & \delta_{3m} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{1\ell} & \delta_{1m} & \delta_{1k} \\ \delta_{2\ell} & \delta_{2m} & \delta_{2k} \\ \delta_{3\ell} & \delta_{3m} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} & 3 \end{pmatrix} \\
&= \delta_{ik}(\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell}) - \delta_{jk}(\delta_{i\ell}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{k\ell}) + 3(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) \\
&= (\delta_{j\ell}\delta_{im} - \delta_{jm}\delta_{i\ell}) - (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) + 3(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) \\
&= \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}
\end{aligned}$$