Tarea: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Hector Ramirez
Auxiliares: Roberto Castillo & Emilio Vilches

Enero de 2012

P0. *a*) Resuelva la ecuación de ondas amortiguada

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2au_t - c^2 u_{xx} =& 0 \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0. \\ u(x,0) =& f(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x,0) =& 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) =& 0, \quad t > 0 \\ u(\pi,t) =& 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

donde $a \geq 0$ y $c > 0$ son constantes.

b) Si $a = 0$ demuestre el principio de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

Indicación: $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

P1. *a*) Resuelva el problema de Dirichlet en el disco unitario

$$\begin{aligned} \Delta u =& 0 \quad r < 1, \quad -\pi < \theta < \pi \\ u(1,\theta) =& f(\theta) \quad -\pi < \theta < \pi \end{aligned}$$

Observe que al utilizar separación de variables, si $u(r,\theta) = A(r)B(r)$, entonces $B(-\pi) = B(\pi)$ y $B'(-\pi) = B'(\pi)$.

b) Demuestre que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta-\phi))\right] d\phi$$

Indicación: $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

c) Pruebe que

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{r^2+1-2r\cos\theta} \qquad \text{si } r < 1$$

d) Demuestre la fórmula integral de Poisson:

$$u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\phi)d\phi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}.$$

P2. *a*) Calcule la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ para

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = 1$ si $-\pi < x < 0$ y $f(x) = 2$ si $0 < x < \pi$.

indicando donde ella es igual a f.

b) Resuelva la ecuación del calor no homogenea

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} =& F(x,t) \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0. \\ u(0,t) =& 0 \quad t > 0 \\ u(\pi,t) =& 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) =& 0, 0 < x < \pi \end{aligned}$$

Indicación: Suponga que $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$.

P3. *a*) Determine la serie de Fourier de la función $f(x) = 1 - |x|$ en el intervalo $[-2, 2]$, deduzca el valor de la serie de numeros reales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

b) Resuelva la siguiente EDP no homogénea de una dimensión:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 4\sin(2x) \quad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \quad x \in (0,\pi) \\ u(0,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(\pi,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u_t(x,0) &= \pi - x \quad x \in (0,\pi) \end{aligned}$$

INDICACIÓN: Considere el cambio $y(x,t) = u(x,t) + \phi(x)$.

P4. *a*) Dado $a > 0$, calcule la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}.$$

b) Use tranformada de Fourier para resolver:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} =& 0 \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < 1. \\ u_y(x,0) =& 0 \quad 0 < x < +\infty \\ u_x(0,y) =& 0, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,1) =& \frac{1}{(x^2 + 4^2)^2}, \quad 0 < x < +\infty \end{aligned}$$

P5. Los cuatro lados de una placa cuadrada perfectamente delgada de lado π se mantienen a temperatura 0 y completamente aislados. Queremos describir la evolución de la temperatura u de la placa si inicialmente está dada por una función $f(x, y)$ que se supone conocida.

a) Determine el problema diferencial que modela esta situación física explicando condiciones iniciales y de borde.

b) Aplicando el método de separación de variables a la ecuación diferencial en derivadas parciales de la parte anterior, pruebe que la temperatura en la placa está dada por la siguiente expresión

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,n} \sin(mx) \sin(ny) e^{-(m^2+n^2)t} \tag{1}$$

c) Pruebe que las constantes en (1) se determinan mediante

$$B_{k,l} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin(kx) sin(\ell y) dxdy \quad \forall k, \ell \geq 1$$

P6. Las ecuaciones de una cuerda infinita están regidas por la ecuación de onda unidimensional:

$$(EO) \quad y_{tt}(t, x) = a^2 y_x x(t, x) \quad t \in \mathbb{R}, x \in (0, +\infty) \tag{2}$$

donde $y(t, x)$ es el desplazamiento de la cuerda en la posición x en el instante t, con respecto al eje $y = 0$, $a > 0$ es una constante.

a) Suponga que en el instante inicial $t = 0$ la cuerda está tensionada de manera que $y(0, x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y que es 'soltada' desde esa posición, es decir $y_t(0, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Encuentre $y(t, x)$.

b) Suponga ahora que la cuerda es semi-infinita, es decir (EO) vale para $x \in [0, \infty)$. Considere las mismas condiciones iniciales para $x \geq 0$ y suponga que en todo momento el extremo $x = 0$ de la cuerda permanece fijo en el origen. Encuentre $y(t, x)$.
Indicación: Considere la extensión impar de f a todo $\mathbb{R}$.

P7. *a*) Calcule la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

b) Resolver el problema de la conducción del calor en una placa unidimensional infinita, modelado por el siguiente problema diferencial

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}$$

y con $u(x, t)$ acotada.

P8. Se desea determinar la evolución de temperatura $u(t, x)$ en una barra semiinfinita cuando hay transferencia de calor al medio circundante según el modelo

$$u_t = ku_{xx} - \gamma u \quad t > 0,\ 0 < x < +\infty$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de difusividad térmica y $\gamma > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor. Suponga que la barra está asilada en $x = 0$, esto es

$$u_x(t, 0) = 0 \quad t > 0$$

y que la distribución inicial de temperaturas está dada por una función $f(x)$, es devir

$$u(0, t) = f(x), \quad 0 < x < +\infty$$

Pruebe que u se puede expresar como $u(x, t) = [f(\cdot) * G(t, \cdot)](x)$ para una función $G(t, x)$ la cual debe determinar usando el método de la transformada de Fourier.
Indicación: Extienda apropiadamente el problema a todo $x \in \mathbb{R}$.

P9. Considere una cinta delgada semi-infinita inmersa en un medio a temperatura cero. Queremos determinar el campo estacionario de temperaturas $u(x,0)$ en la cinta cuando la transferencia de calor tiene lugar a través de su superficie. Bajo ciertos supuestos, se sabe que en estas condiciones $u(x,y)$ satisface la ecuación diferencial

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - hu(x,y) = 0 \quad 0 < x < +\infty,\ 0 < y < 1$$

donde h es una constante positiva llamada coeficiente de transferencia de calor superficial. Resuelva este problema diferencial con condiciones de borde dadas por

$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 < y < 1$$

y además

$$u(x,0) = 0,\ u(x,1) = f(x), \quad 0 < x < +\infty$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

Indicación: Extienda apropiadamente el problema a todo $x \in \mathbb{R}$.