Clase auxiliar 9: Cálculo Avanzado

Profesor: Hector Ramirez Aux: Emilio Vilches

Martes 13 de Diciembre de 2011

P1. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa definida por $f(z) = \exp(-z^2)$. Dado $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{4}]$.

a) Demuestre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\theta_0} R |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0.$$

b) Deduzca que

$$e^{i\theta_0} \int_0^\infty f(e^{i\theta} x) dx = \int_0^\infty f(x) dx.$$

c) Pruebe que

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

P2. Pruebe que $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2} dz = 2\pi i$.

P3. a) Sea $D = \{x + iy: x > 0, y > 0\}$ y $f: \bar{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $\bar{D}$ y holomorfa en D . Suponga que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M/|z|^2$ para todo $z \in \bar{D}$, $|z| \geq 1$. Pruebe que para todo $\theta \in [0, \pi/2]$ se tiene

$$\int_0^\infty f(x) dx = e^{i\theta} \int_0^\infty f(e^{i\theta} x) dx.$$

b) Utilice lo anterior con $f(z) = \exp(iz)/(1+z)^2$ y $\theta = \pi/2$ para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x)^2} dx + \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{1+x^2} dx = 1.$$

P4. Encuentre la serie de potencias de la función $h(z) = \log(1+z^3)$ en torno al punto $z = 0$ e indique su radio de convergencia.

P5. Usando la fórmula de Cauchy, pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz,$$

donde C es cualquier curva cerrada que encierra el origen. Deduzca que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x \cos \theta} d\theta.$$