Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Ejercicio 1

MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Roberto Castillo, Emilio Vilches
Martes 8 de Noviembre de 2011

P1.- Considere la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esférico unitario que están sobre los planos $z = 2y$ e $y = 0$. Es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 2y,\ y \geq 0\}$.

(a) Bosqueje S y usando coordenadas esféricas encuentre una parametrización regular de esta superficie.

(b) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(r, \theta, \varphi) = \frac{r \sin^2 \theta}{\sin \varphi \cos^2 \varphi}\, \widehat{r} + r e^r\, \widehat{\theta}$$

sobre la superficie S orientada según la normal exterior a la esfera.

Solución:

(a) Utilizando coordenadas esféricas se tiene

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \qquad r \geq 0\,,\ \theta \in [0, 2\pi)\ y\ \varphi \in [0, \pi] \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

utilizando la definición de S se tiene que $r = 1$ y

$$\cos\varphi \geq 2\sin\theta\sin\varphi \tag{1}$$
$$\sin\varphi\sin\theta \geq 0 \tag{2}$$

de (1) se obtiene que $\operatorname{cotg}\varphi \geq 2\sin\theta$ para $\varphi \in (0, \pi)$, de donde $0 \leq \varphi \leq \operatorname{arccotg}(2\sin\theta)$. Por otro lado de (2) se obtiene que $\theta \in [0, \pi]$. Por lo tanto, una parametrización de S es:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \hat{r} \quad \varphi \in [0, \operatorname{arccotg}(2\sin\theta)],\ \ \theta \in [0, \pi]$$

(b) Después de un cálculo se obtiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k} \\ F_1 &= \frac{(x^2+y^2+z^2)y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}z^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ F_2 &= \frac{(x^2+y^2+z^2)y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ F_3 &= \frac{(x^2+y^2+z^2)y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}z} \end{aligned}$$

Luego, los puntos de S, donde el campo no está definido son: $A = (0,0,1)$, $B = (1,0,0)$ y $C = (-1,0,0)$. Los puntos A, B y C están en la frontera de S, por lo tanto la integral de flujo debe calcularse como una integral impropia. Dado que S está sobre la esfera de radio 1 se tiene que $\hat{n} = \hat{r}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{arccotg}(2\sin\theta)} \frac{\sin^2\theta}{\sin\varphi\cos^2\varphi} \sin\varphi d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin^2\theta \int_0^{\operatorname{arccotg}(2\sin\theta)} \sec^2\varphi d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{2} d\theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

P2.- Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida en coordenadas cilíndricas por $\rho = \cos u$ $\theta = \theta_0$ fijo y $z = \sin(2u)$, donde $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$. Considere la superficie S que se obtiene al rotar Γ alrededor del eje z.

(a) Encuentre una parametrización regular para la superficie S en función de (u, θ).

(b) Usando el teorema de la divergencia calcule el volumen de la región encerrada por S.
Indicación: Considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = z\widehat{k}$.

Solución:

(a) Dado que S corresponde a una superficie de rotación, una parametrización de S es:

$$\begin{array}{ll}
x = \cos u \cos\theta & \\
y = \cos u \sin\theta & \quad -\dfrac{\pi}{2} \le u \le \dfrac{\pi}{2}, \theta \in [0, 2\pi) \\
z = \sin(2u) &
\end{array}$$

o en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r}(u,\theta) = \cos(u)\hat{\rho} + \sin(2u)\hat{k} \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi)$$

(b) Sea Ω el volumen definido por S. Notemos que $\operatorname{div}\vec{F} = 1$, y utilizando el teorema de la divergencia:

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dV = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Luego

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) du d\theta$$

pero

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) &= \vec{F} \cdot \Big[(\cos u\, \hat{\theta}) \times (-\sin u\, \hat{r} + 2\cos(2u)\, \hat{k}) \Big] \\
&= \vec{F} \cdot \Big(\cos u \sin u\, \hat{k} + 2\cos(2u)\cos u\, \hat{\rho} \Big) \\
&= \sin(2u)\, \hat{k} \cdot \Big(\cos u \sin u\, \hat{k} + 2\cos(2u)\cos u\, \hat{\rho} \Big) \\
&= \sin(2u)\cos u \sin u
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u)\cos u \sin u \; du d\theta = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2u) du = \frac{\pi^2}{2}.$$