**Problema 5.** Considere la superficie $S$ que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$ donde $a > 0$.

1. Encuentre una parametrización de $S$.
2. Calcule el área de $S$.

**Solución.**

1. Tomando coordenadas cilíndricas:
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned}$$
se tiene que
$$\begin{aligned} z &= \rho \\ \rho^2 - 2a\rho\sin(\theta) &\leq 0 \end{aligned}$$
descartamos el caso $\rho = 0$, luego una parametrización de $S$ estará dada por:
$$\vec{r}(\rho,\theta) = \rho\left(\hat{p} + \hat{k}\right) \quad \theta \in [0,\pi] \quad \rho \in [0, 2a\sin(\theta)]$$

2. El área se calcula como:
$$A = \int\int_S dS$$
calculamos
$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \vec{\rho} + \vec{\theta} \\ \tfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= \rho\vec{\theta} \end{aligned}$$
luego
$$\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\| \quad = \quad \|\rho\vec{k} - \rho\vec{\rho}\| = \rho\sqrt{2}$$
por lo tanto
$$A = \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin(\theta)} \rho\sqrt{2}d\rho d\theta = 2\sqrt{2}a^2\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta = \sqrt{2}a^2\pi$$
Tomando $a = 1.$ se obtienen los siguientes gráficos:

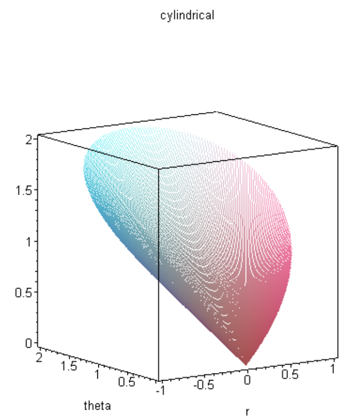


Figura 1: Superficie $S$.

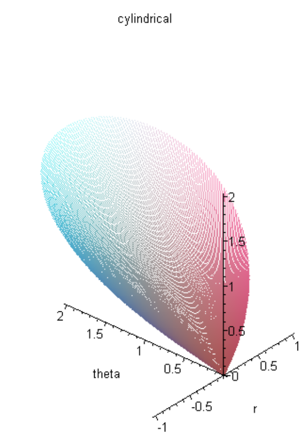


Figura 2: Superficie $S$.

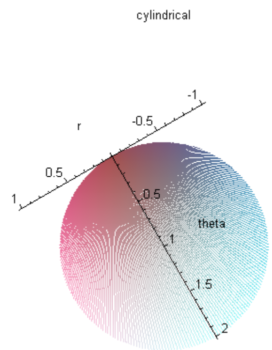


Figura 3: Vista superior de la superficie $S$.