Clase auxiliar: Cálculo Avanzado

Profesor: Hector Ramirez Aux: Emilio Vilches
Martes 18 de Octubre de 2011

P1. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\mathrm{rot}(\nabla\phi) = 0$.

b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{F})) = 0$.

c) $\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}(\vec{G})$.

d) $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

e) $\mathrm{rot}(\phi\vec{F}) = \phi\ \mathrm{rot}(\vec{F}) + \nabla\phi \times \vec{F}$.

f) $\mathrm{div}(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g\mathrm{div}(\vec{F})$.

P2. Considere el campo $\vec{F} = r^3\widehat{r} + \exp(\varphi\cosh(r))\widehat{\varphi}$ (coordenadas esféricas). Calcule $\mathrm{div}\vec{F}$.

P3. Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho^2}\widehat{\rho} + e^{-\rho^2}\widehat{\theta} + z\widehat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Calcule $\mathrm{div}\vec{F}$ y $\mathrm{rot}\vec{F}$.

P4. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$.

(a) Probar que $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$.

(b) Los campos vectoriales $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son selenoidales y están relacionados por las ecuaciones

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

donde μ, ϵ son constantes. Probar que $\vec{E}$ y $\vec{H}$ satisfacen la ecuación diferencial:

$$\nabla^2\vec{A} = \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

P5. Considere la superficie S que se obtiene al intersectar la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con el volumen definido por $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$, donde $a > 0$.

a) Encuentre una parametrización para S.

b) Calcule el área de S.

P6. Calcular el gradiente en coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ) que se relacionan con las coordenadas cartesianas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x &= \epsilon\eta\cos\phi \\ y &= \epsilon\eta\sin\phi \\ z &= \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \epsilon^2\right) \\ \epsilon,\eta &> 0 \ \phi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Identifique geométricamente las nuevas coordenadas y justifique el nombre.

P7. Calcule el gradiente de

$$f(x,y,z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2+y^2+z^2}$$