1. Límites y continuidad

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^N$. Queremos definir la noción de continuidad de una función

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$$

en un punto $x_0 \in \Omega$.

Definición. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y un punto $x_0 \in \Omega$. Decimos que f es *continua en x_0, relativamente a* Ω, si para *toda* sucesión $x_n \to x_0$ con $x_n \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \ .$$

Si f es continua en todo $x_0 \in \Omega$ diremos simplemente que f *es continua en* Ω.

Definición. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ un *punto de acumulación* de Ω. *Observar que x_0 no necesariament pertenece a* Ω.

Decimos que $L \in \mathbb{R}^m$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 relativamente a Ω, si para toda sucesión $x_n \to x_0$ con $x_n \in \Omega$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \ = \ L \, .$$

Escribimos en tal caso

$$\lim_{x\to x_0,\, x\in\Omega} f(x) = L \, ,$$

Observación. En la definición NO va la condición $x_n \neq x_0$ como escribimos en clases! La definición de la clase, es en verdad el limite de f en x_0 relativo a $\Omega \setminus \{x_0\}$. Al eliminar x_0 del conjunto de definición de f (o bien restringiendo f), se agrega la condición $x_n \neq x_0$, pero la definición del apunte (que es la de arriba) es más general!.

Ejemplo 1.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \neq 2, \\ 10000 & si\ x = 2. \end{cases}$$

Primero observamos que f no es continua en $x_0 = 2$. Esto es por que

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

no existe puesto que si tomo sucesiones x_n con $x_n \neq x_0$ el limite de $f(x_n)$ es 4 pero si tomo la sucesión constante $x_n = x_0$ entonces el limite es 10000, i.e. no hay limite. Sin embargo, el limite

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f|_{\mathbb{R} \setminus \{x_0\}}(x) = 4.$$

Más aun, si $\Omega = (0,1) \cup \{2\}$, entonces 2 no pertenece a der(Ω) (i.e., la noción de limite no está definida en $x_0 = 2$) pero f SI es continua en $x_0 = 2$. En efecto, sea $x_n \to x_0$ tal que $x_n \in \Omega$. Si suponemos $x_n \neq 2$ tenemos $||x_n - x_0|| > 1$, lo que contradice que $x_n \to x_0$, luego $x_n = x_0$ a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.2. *Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Entonces

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0.$$

En efecto, $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 \geq 0$ para todo a, b. Luego

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

de donde se sigue que

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

AdemÃ¡s $(0,0) \in$ der(Ω) y luego para toda sucesión $(x_n, y_n) \to (0,0)$ se tiene que

$$|f(x_n, y_n)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to 0,$$

lo que equivale a decir que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Proposición 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Suponga que $x_0 \in \Omega$ pero $x_0 \notin$ der(Ω) (x_0 es un punto aislado). Entonces f es continua en x_0.*