MA2001-2: Cálculo en Varias Variables (Primavera 2011)
Profesores: José Aliste, Natacha Astromujoff.
Auxiliares: Sebastián Cea, José Mendez

Control 3

Pregunta 1:

a) (3 ptos.) Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Se sabe que la integral $\iint_D f(x,y)dxdy$ se puede escribir como la integral iterada $\int_0^1 [\int_{x^2}^x f(x,y)dy]dx$. Esbozar la región D e intercambiar el orden de integración en la integral iterada.

b) (3 ptos.) Calcular:

$$\int_1^2 \left[\int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dy \right] dx$$

.
Indicación: $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log(|x+\sqrt{x^2+a^2}|)$

Pregunta 2:

a) (3 ptos.)Evaluar

$$\int\int_D y^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy$$

donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \le y \le 1$ y $x^2+y^2 \le 1$.

b) (3 ptos.)Calcular la siguiente integral usando coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_B zdxdydz,$$

donde B es la región que queda dentro cilindro $x^2+y^2=1$, sobre el plano horizontal $z=0$ y debajo del cono $z=(x^2+y^2)^{1/2}$.

Pregunta 3:

a) (3 ptos.) Sea f una función continua sobre un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$(\min_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R) \le \int_R f \le (\max_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R),$$

donde $A(R)$ denota el area del rectángulo.
Indicación: Use suma inferior y superior de Riemann.

b) (3 ptos.) Si $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ y $R = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$, mostrar que

$$\frac{1}{e} \le \frac{1}{4\pi^2}\int_R f \le e.$$

Tiempo: 3 horas

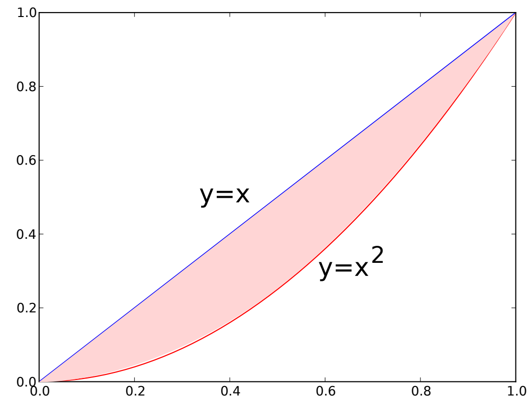
1. Pauta

Pregunta 1:

a) Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Se sabe que la integral $\iint_D f(x,y)dxdy$ se puede escribir como la integral iterada $\int_0^1 [\int_{x^2}^x f(x,y)dy]dx$. Esbozar la región D e intercambiar el orden de integración en la integral iterada.

Solución:

Dibujo (1.5ptos):



Intercambio de orden: (1.5 ptos)

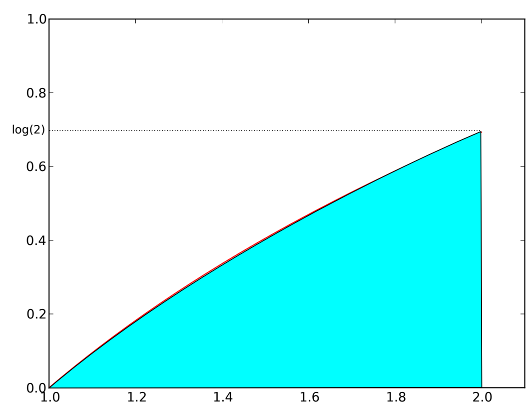
$$\int_0^1 [\int_{x^2}^x f(x,y)dy]dx = \int_0^1 [\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx]dy$$

Calcular:

$$\int_1^2 \left[\int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dy\right] dx.$$

Indicación: $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log(|x+\sqrt{x^2+a^2}|)$

Solución:



Intercambiamos ordenes de integración. $y = \log x$ en $x = e^y$. El maximo de y para la región se tiene con $x = 2$, i.e., $y = \log(2)$. Asi, la integral queda

$$I = \int_0^{\log(2)} \sqrt{1+e^{2y}} \Big[\int_{e^y}^2 (x-1)dx\Big] dy, \qquad (1.5\text{ptos})$$

Ahora,

$$\int_{e^y}^{2}(x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{x=e^y}^{2}=e^y-\frac{e^{2y}}{2} \qquad (0.25\text{ptos})$$

Luego, con un cambio de variable, $u=e^y$, $du=e^y dy$, se obtiene:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\log(2)}\sqrt{1+e^{2y}}\left(e^y-\frac{e^{2y}}{2}\right)dy\\&=\int_1^2\sqrt{1+u^2}\left(1-\frac{u}{2}\right)du=\int_1^2\sqrt{1+u^2}du-\frac{1}{2}\int_1^2 u\sqrt{1+u^2}du \qquad (0{,}5ptos)\end{aligned}$$

La primera integral se calcula usando la indicación:

$$\begin{aligned}\int_1^2\sqrt{1+u^2}du&=\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\log(u+\sqrt{1+u^2})\Big|_{u=1}^{2}\\&=\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5}))-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})) \quad (0{,}25ptos)\end{aligned}$$

Para la segunda integral notemos que $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{3}(1+u^2)^{3/2}\right)=u\sqrt{1+u^2}$, luego por Teorema Fundamental del Calculo, se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u\sqrt{1+u^2}du=\frac{1}{6}(1+u^2)^{3/2}\Big|_{u=1}^{2}=\frac{1}{6}(5^{3/2}-2^{3/2}) \quad (0{,}25ptos)$$

Finalmente, el resultado se obtiene restando las dos integrales:

$$I=\frac{\sqrt{5}}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right) \qquad (0{,}25ptos)$$

Pregunta 2:

a) (3 ptos.)Evaluar

$$\int\int_D y^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy$$

donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2}\le y\le 1$ y $x^2+y^2\le 1$.

Solución: Usamos coordenadas cilindricas: $f(x,y)=y^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$, luego $f(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta))=\rho^3\sin^3(\theta)\rho^{-3}=\sin^3(\theta)$. El determinante del cambio de variables en cilindricas es: ρ. Luego,

$$\int\int_D y^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1}\sin^3(\theta)\rho d\rho d\theta=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin^3(\theta)\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1}\rho d\rho d\theta=$$

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin^3(\theta)\frac{\rho^2}{2}\Big|_{\rho=\frac{1}{2\sin\theta}}^{1}d\theta=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin^3(\theta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2(\theta)}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin^3(\theta)d\theta-\frac{1}{8}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin(\theta)d\theta \quad (1{,}5ptos$$

La primera integral se escribe

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin^3(\theta)d\theta&=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin(\theta)\sin^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin(\theta)(1-\cos^2(\theta))d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin(\theta)d\theta-\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin(\theta)\cos^2(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\frac{d}{d\theta}(-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)) = \cos^2(\theta)\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin^3(\theta)d\theta &= \frac{1}{2}(-\cos(\theta))\Big|_{\theta=\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}\cos^3(\theta))\Big|_{\theta=\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos(5\pi/6)-\cos(\pi/6)) + \frac{1}{6}(\cos^3(5\pi/6)-\cos^3(\pi/6)) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}\frac{3}{8}(1{,}0ptos)\end{aligned}$$

La segunda integral es

$$\frac{1}{8}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin(\theta)d\theta = \frac{1}{8}(-\cos(\theta))\Big|_{\theta=\pi/6}^{5\pi/6} = -\frac{1}{8}(\cos(5\pi/6)-\cos(\pi/6)) = \frac{\sqrt{3}}{8}(0{,}5ptos)$$

Finalmente, restando se obtiene $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

b) (3 ptos.)Calcular la siguiente integral usando coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_B z dxdydz,$$

donde B es la región que queda dentro cilindro $x^2+y^2=1$, sobre el plano horizontal $z=0$ y debajo del cono $z=(x^2+y^2)^{1/2}$.

Solución: En coordenadas cilindricas, la region dentro del cilindro satisface $0 \leq \rho \leq 1$, la region sobre el plano horizontal satisface $z \geq 0$ y la region debajo del cono satisface $z \leq \rho$. El determinante del cambio de variables es ρ. Asi,

$$\begin{aligned}\iiint_B z dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\rho} z\rho dzd\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^3}{2}d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{8}\Big|_{\rho=0}^{1} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Pregunta 3:

a) (3 ptos.) Sea f una función continua sobre un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$(\min_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R) \leq \int_R f \leq (\max_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R),$$

donde $A(R)$ denota el area del rectángulo.
Indicación: Use suma inferior y superior de Riemann.

Solución: Si tomamos una partición uniforme de $R_n = \{R_{i,j}\}_{i,j}$ de n^2 rectangulos, para cualquier suma de Riemann en R_n (i.e., con una elección arbitraria de puntos $x_{i,j} \in R_{i,j}$

para todo i, j) se tiene

$$(1)\quad (\min_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R) =$$

$$\min_{(x,y)\in R} f(x,y) \sum_{R_{i,j}} A(R_{i,j}) \leq \sum_{R_{i,j}\in R_n} f(x_{i,j})A(R_{i,j}) \leq \max_{(x,y)\in R} f(x,y) \sum_{R_{i,j}} A(R_{i,j})$$
$$= (\max_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R)$$

(1.5ptos).

Ahora bien, como f es continua sobre el rectangulo R, sabemos que f es Riemann-integrable (0.5ptos). Esto implica que si tomamos límite cuando $n \to \infty$, la suma de Riemann converge a la integral (0.5ptos). Como la desigualdad anterior se tiene para todo n, al tomar limite en n se obtiene:

$$(\min_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R) \leq \int_R f \leq (\max_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R), (0{,}5ptos)$$

b) (3 ptos.) Si $f(x,y) = e^{\sin(x+y)}$ y $R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, mostrar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_R f \leq e.$$

Solución: Como $x + y$ varía entre -2π y 2π para $(x,y) \in R$, se tiene que

$$\min_{(x,y)\in R} \sin(x+y) = -1 \quad \text{y} \quad \max_{(x,y)\in R} \sin(x+y) = 1.$$

Como $t \mapsto e^t$ es creciente y continua, se tiene que

$$\min_{(x,y)\in R} e^{\sin(x+y)} = e^{-1} \quad \text{y} \quad \max_{(x,y)\in R} e^{\sin(x+y)} = e.$$

Ahora bien, por la parte a) se tiene que

$$4\pi^2 \frac{1}{e} = (\min_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R) \leq \int_R f \leq (\max_{(x,y)\in R} f(x,y))A(R) = 4\pi^2 e$$

y la conclusión se obtiene dividiendo la ultima desigualdad por $4\pi^2$.