MA2001-2- Cálculo en Varias Variables.
Profesor: José Aliste - Natacha Astromujoff.
Auxiliares: Sebastián Cea - José Méndez.

Auxiliar 9

14 de Diciembre de 2011

Definición 1 (Curva)**.** *Un conjunto* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ *se dice* ***curva*** *o* ***trayectoria*** *si existe una función continua* $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *tal que:*

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \gamma(t); t \in [a,b] \right\} = Im(\gamma)$$

γ *es llamada una* ***parametrización*** *de la curva* Γ*. Adicionalmente, si* γ *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *diremos que* Γ *es* ***suave****.*

Definición 2 (Superficie)**.** *Un conjunto* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *se dice* ***superficie*** *si existe una función continua* $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que:*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \sigma(t,s); (t,s) \in D \right\} = Im(\sigma)$$

σ *es llamada una* ***parametrización*** *de* S*. Adicionalmente, si* σ *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *diremos que* S *es* ***suave****.*

Definición 3 (Integral sobre una curva)**.** *Dada una curva suave* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ *y una función* $f(x,y,z)$ *cuyo dominio contiene a* Γ*, se define la* ***Integral de trayectoria*** *o* ***Integral sobre la curva*** Γ *de* f *como:*

$$\int_\Gamma f ds := \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

En donde γ *es una parametrización* $\mathcal{C}^1$ *de* Γ*.*

P1. Una párticula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, de forma tal que su altura z y el ángulo θ en coordenadas cilíndricas cumplen la relación $z = e^{-\theta}$, con $\theta \in [0,a]$.

(a) Encuentre una parametrización de Γ. Dibuje la curva.

(b) Calcule el largo de Γ.

(c) Calcule el valor de la integral de línea de $f(x,y,z) = \dfrac{2xy}{z^2}$ sobre Γ.

P2. Considere la curva que se forma al intersectar las superficies:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 + y^2 \end{aligned}$$

considerando $z > 0$.

(a) Encuentre una parametrización de esta curva.

(b) Suponga que la curva describe la forma de un alambre de densidad lineal $\rho(x,y,z) = xy$. Calcule la masa de este alambre.

P3. Parametrice la superficie del elipsoide de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

P4. Encuentre una parametrización de la superficie S determinada por los puntos del casquete esférico unitario que están por encima del plano $z = 2y$.

P5. Calcule el volumen de una esfera de radio R, considerando que se puede generar como el sólido de revolución de la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$