Clase Auxiliar: Cálculo en Varias Variables

Raúl Uribe & Braulio Sanchez & Emilio Vilches

16 de Noviembre de 2011

P1. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una primitiva de g.

a) Determinar todas las funciones $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, soluciones de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$g(y)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

utilizando las nuevas coordenadas u y v definidas por:

$$x = u + h(v) \quad y = v$$

b) Utilizar el resultado anterior para resolver:

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + (y^2+1)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

P2. Suponga que $u(\tau, x)$ satisface $\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. sobre una curva donde la variable x se escribe como una función diferenciable de τ, para la cual:

$$\frac{dx}{d\tau} = u(\tau, x)$$

Pruebe entonces que $u(\tau, x(\tau))$ es constante.

P3. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\mu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables.

a) Si $\mu(x,y) = f(x, y, \mu(x,y))$ encuentre $\nabla\mu(x,y)$.

b) Aplique la formula anterior a $f(x,y,z) = x^y$.

P4. Sean f y g dos funciones de variable real, derivables en $\mathbb{R}$. Se define la función:

$$z(x,y) = x^2yf(u) + xy^2g(v)$$

con $u = \frac{x}{y}$ y $v = \frac{y}{x}$, Calcule:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$