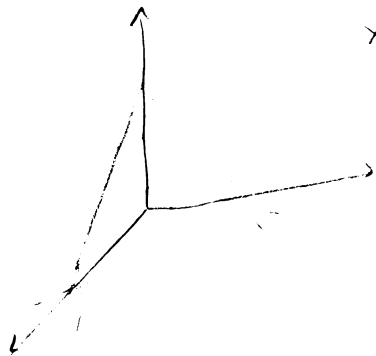


P1

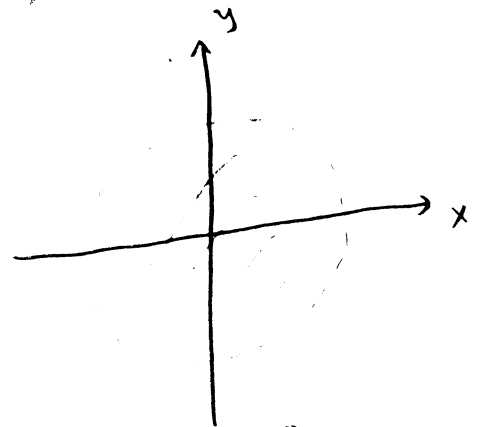
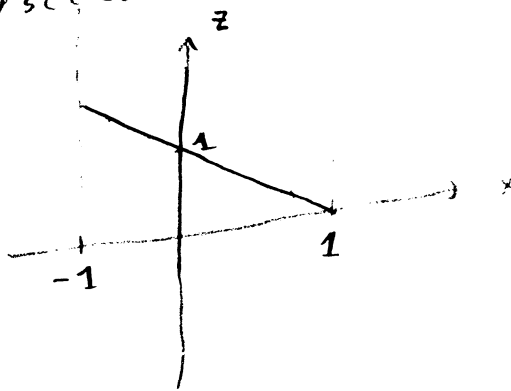
a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$



$x + y + z = 1$ corresponde al plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$

$x^2 + y^2 < 1$ corresponde a un cilindro sólido sin su frontera geométrica.

Luego la intersección luce de perfil como



Como el conjunto $B(x, r)$ corresponde a una esfera sin su borde geométrico y A corresponde a una superficie $\text{int}(A)$ es vacío.

Por otro lado si nos paramos en la frontera geométrica $\forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ Luego

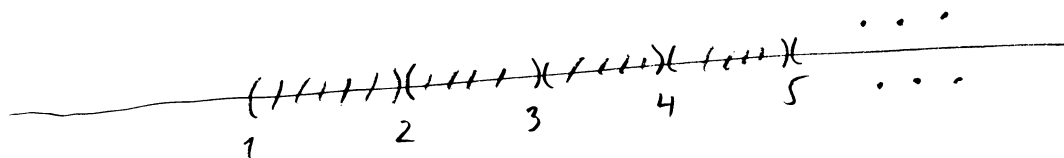
$$\text{Adh}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Finalmente

$$\text{Fr } A = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1, x^2+y^2 \leq 1\}$$

Nota: La $\text{Fr } A$ definida como $\text{Adh } A \setminus \text{Int } A$ es un concepto topológico, es decir depende de la definición de abiertos y cerrados y no coincide siempre con la frontera geométrica (como lo muestra el ejemplo anterior).

b) $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$ (nota: aquí $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)



Notemos que el conjunto $B(x, r) = (x-r, x+r)$.
 Luego se me pare sobre cualquier $x \in B$ puedo dibujar una bola de radio suf. pequeño de modo que la bola quede dentro de B .
 Así $\text{Int } B = B$.

Nota: Otra manera de argumentar es que el conjunto $(n, n+1)$ es abierto, por lo tanto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$ es abierto y Así $\text{Int } B = B$

notemos que $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\forall \delta > 0 \quad (n-\delta, n+\delta) \cap B \neq \emptyset$$

$$(\text{pues } n \in (n-\delta, n+\delta) \quad \forall \delta > 0)$$

$$\text{Luego } \text{Adh } B = [1, +\infty)$$

$$\text{Finalmente: } \text{Fr } B = \text{Adh } B \setminus \text{Int } A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$c) \quad C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q} \}$$

C corresponde a los círculos de radio racional entre 0 y 1. Como $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$ son densos en $\mathbb{R}$

(que quiere decir que $\text{Adh } (\mathbb{Q}) = \text{Adh } (\mathbb{I}) = \mathbb{R}$) se tiene que la $\text{Adh } C$ debe contener a todos los radios entre 0 y 1 con radio real. Por otro lado

$$\forall \delta > 0 \quad B(0, \delta) \cap C \neq \emptyset \quad \rightarrow \quad 0 \in \text{Adh } C$$

Lo mismo ocurre con el círculo de radio 1 por lo tanto $\text{Adh } (C) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

Por otro lado nunca puedo dibujar una bola abierta que quede completamente contenida en C (pues siempre se vea un punto perteneciente a un círculo de radio irracional)

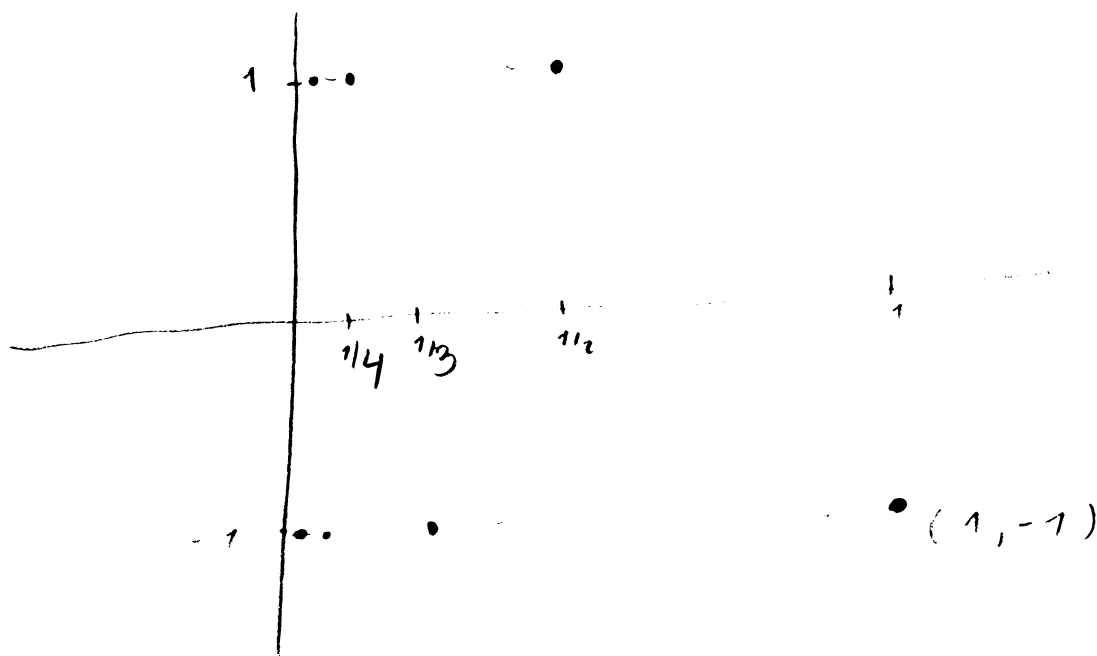
$$\therefore \text{Int } (C) = \emptyset.$$

Finalmente

$$Fr C = Adh C \setminus Int C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

d) $D = \{ (\frac{1}{n}, (-1)^n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Dibujemos D



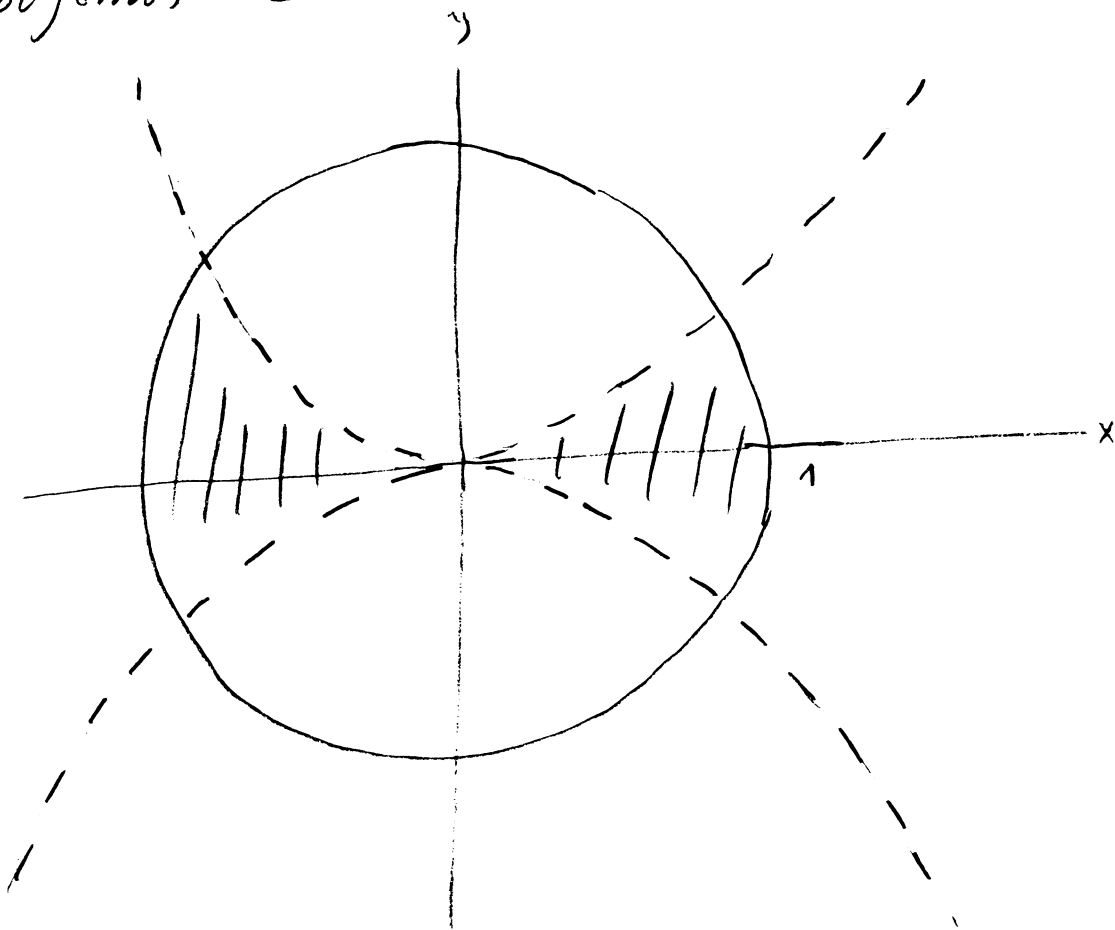
$$Int(D) = \emptyset$$

$$Adh(D) = \{0, -1\} \cup \{0, 1\} \cup D$$

$$\begin{aligned} Fr(D) &= Adh(D) \setminus Int(D) \\ &= D \cup \{0, -1\} \cup \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$e) \quad E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|^2, \quad x^2 + y^2 \leq 5 \}$$

Dibujamos E :

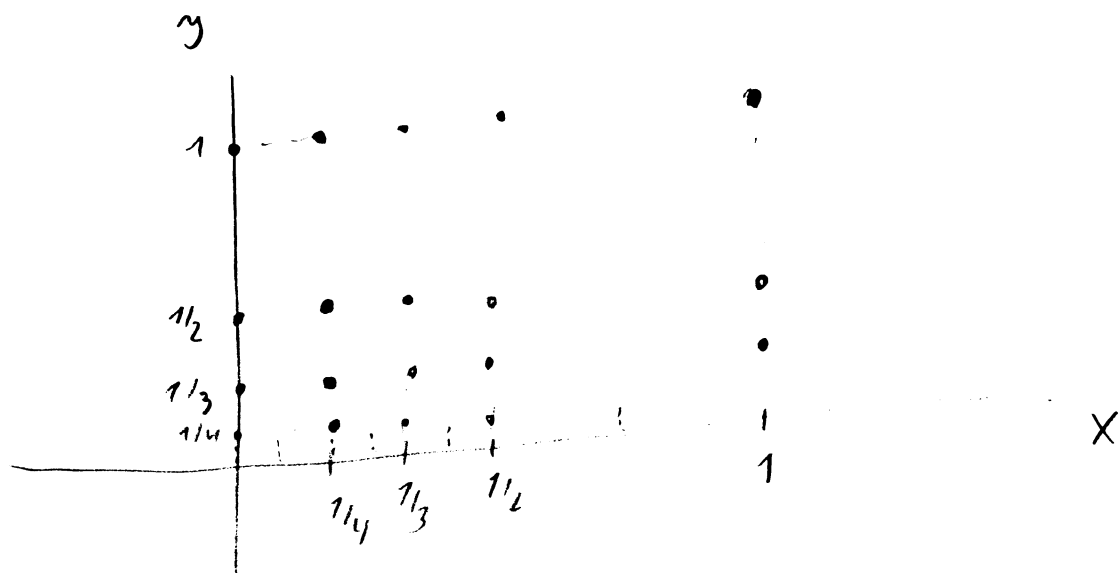


$$\text{Adh } E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|^2, \quad x^2 + y^2 \leq 5 \}$$

$$\text{Int } E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < |x|^2, \quad x^2 + y^2 < 5 \}$$

$$\text{Fr } E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| = |x|^2, \quad x^2 + y^2 = 5 \}$$

$$f) \quad F = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) ; m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$



$$\text{Int } F = \emptyset$$

$$\text{Adh } F = F \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{m}, 0 \right) : m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{Fr } F = \text{Adh } F \setminus \text{Int } F$$

P2

a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ probar que

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2$$

Recordemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio euclidiano con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$\langle y, z \rangle = \langle z, y \rangle$$

Además

$$0 \leq \|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y, x \pm y \rangle = \langle x, x \rangle \pm 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\Rightarrow 2|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Luego

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 &= \left\langle \frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle x, x \rangle + \frac{1}{4} \cdot 2 \langle x, y \rangle + \frac{1}{4} \langle y, y \rangle \\ &\leq \frac{1}{4} \|x\|^2 + \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{4} + \frac{1}{4} \|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2$$

$$b) \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

En efecto:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$+ \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

P3

Recordemos que A es abierto ssi

$$\forall x \in A \quad \exists r_x > 0 \quad \text{tq} \quad B(x, r_x) \subseteq A.$$

a) si $A \subseteq B$ entonces $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$

en efecto: sea $x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow \exists r_x > 0 \text{ tq } B(x, r_x) \subseteq A$

$$\text{como } A \subseteq B \quad B(x, r_x) \subseteq A \subseteq B$$

$$\therefore \exists r_x > 0 \text{ tq } B(x, r_x) \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow x \in \text{int}(B).$$

$$b) \quad \text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$$

$$\stackrel{=}{=} \text{sea } x \in \text{int}(A \cap B) \Leftrightarrow \exists r_x > 0 \text{ tq } B(x, r_x) \subseteq A \cap B$$

$$\text{pero } \left. \begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B(x, r_x) \subseteq A \\ B(x, r_x) \subseteq B \end{array}$$

$$\therefore \exists r_x > 0 \text{ tq } \begin{array}{l} B(x, r_x) \subseteq A \\ B(x, r_x) \subseteq B \end{array}$$

$$\Rightarrow x \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B).$$

$$\underline{\geq} \text{ sea } x \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$$

$$\Rightarrow x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow \exists r_x^1 > 0 \text{ ty } B(x, r_x^1) \subseteq A$$

$$x \in \text{int}(B) \Leftrightarrow \exists r_x^2 > 0 \text{ ty } B(x, r_x^2) \subseteq B$$

$$\text{tomando } r_x = \min \{ r_x^1, r_x^2 \} > 0 \text{ se tiene que}$$

$$B(x, r_x) \subseteq B(x, r_x^1) \text{ y } B(x, r_x) \subseteq B(x, r_x^2)$$

$$\therefore \text{ para } r_x > 0 \quad \begin{aligned} B(x, r_x) &\subseteq A \\ B(x, r_x) &\subseteq B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists r_x > 0 \text{ ty } B(x, r_x) \subseteq A \cap B.$$

$$\text{ie } x \in \text{int}(A \cap B)$$

$$c) \text{ Probemos que } \text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$$

$$\text{sea } x \in \text{int}(A) \cup \text{int}(B), \text{ entonces}$$

$$x \in \text{int}(A) \text{ o } x \in \text{int}(B)$$

$$\Rightarrow \exists r_x^1 > 0 \text{ ty } B(x, r_x^1) \subseteq A \text{ o } \exists r_x^2 > 0 \text{ ty } B(x, r_x^2) \subseteq B$$

$$\text{sea } r_x = \min \{ r_x^1, r_x^2 \}, \text{ entonces}$$

$$B(x, r_x) \subseteq B(x, r_x^1)$$

$$B(x, r_x) \subseteq B(x, r_x^2)$$

$$\Rightarrow B(x, r_x) \subseteq A \text{ o } B(x, r_x) \subseteq B$$

$$\text{Así } B(x, r_x) \subseteq A \cup B$$

es decir $\exists r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq A \cup B$

Luego $x \in \text{int}(A \cup B)$

Proberemos que la inclusión anterior es estricta

sea $A = \mathbb{Q}$ (racionales)

$B = \mathbb{I}$ (irrationales)

entonces $\text{int}(A) = \text{int}(B) = \emptyset$, Además

$A \cup B = \mathbb{R}$ y $\text{int}(A \cup B) = \mathbb{R}$

$\therefore \text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subsetneq \text{int}(A \cup B)$

d) Si $A_1, \dots, A_n$ son abiertos entonces
 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto (la intersección finita de
abiertos es abierto)

En efecto: sea $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, entonces

$x \in A_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Luego $\exists r_x^i > 0$ y

$B(x, r_x^i) \subseteq A_i$ (pues A_i es abierto)

definiendo $r_x = \min \{r_x^1, \dots, r_x^n\}$ que es > 0
se tiene que

$B(x, r_x) \subseteq A_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow B(x, r_x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i \quad \therefore x \in \text{int}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$

$$\text{Así } \bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha} \in \text{int} \left(\bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha} \right)$$

$$\text{pero siempre } \text{int} \left(\bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha} \right) \subseteq \bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha} = \text{int} \left(\bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha} \right) \quad \text{si } \bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha} \text{ es abierto}$$

Contraejemplo: si la intersección no es finita puede que la intersección no sea abierta

$$\text{Ejemplo: si } A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ que no es abierto

e) si $\{A_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ son abiertos, entonces

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \text{ es abierto.}$$

En efecto: sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}$, entonces

existe un $\alpha_0 \in I$ ty $x \in A_{\alpha_0}$, pero A_{α_0} es abierto, luego $\exists r_x^{\alpha_0} > 0$ ty $B(x, r_x^{\alpha_0}) \subseteq A_{\alpha_0}$

$$\Rightarrow \exists r_x^{\alpha_0} > 0 \text{ ty } B(x, r_x^{\alpha_0}) \subseteq A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}$$

es decir $x \in \text{int} \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)$. Luego

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \text{ es abierto.}$$

P4

Recordemos que $x \in \text{Adh}(A)$ ssi $\forall \delta > 0$
 $B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$

a) sea $x \in \text{Adh}(A)$

$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

$$\text{pero } A \subseteq B \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in \text{Adh}(B).$$

b) ≤ | Prohemos que $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$

$$\text{sea } x \in \text{Adh}(A \cup B) \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad (B(x, \delta) \cap A) \cup (B(x, \delta) \cap B) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

$$\text{ o } B(x, \delta) \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow (\forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset)$$

$$\text{ o } (\forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap B \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow x \in \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$$

2) Problemas que $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B) \subseteq \text{Adh}(A \cup B)$

sea $x \in \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$, entonces

$$(\forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset) \text{ o } (\forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap B \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset \text{ o } B(x, \delta) \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in \text{Adh}(A \cup B).$$

c) Ptg $\text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$

sea $x \in \text{Adh}(A \cap B) \Rightarrow \forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap A \cap B \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ (B(x, \delta) \cap A) \cap (B(x, \delta) \cap B) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset \text{ y } \forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$$

$$\therefore \text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$$

Contraejemplo: Problemas anteriores que la inclusión es estricta.

$$\text{sea } \left. \begin{array}{l} A = \mathbb{Q} \\ B = \mathbb{I} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\text{y } \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\therefore \text{Adh}(A \cap B) \subsetneq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$$

d) Recordemos que A es cerrado ssi
 A^c es abierto, por lo tanto

A_i cerrado $\Rightarrow A_i^c$ abierto

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ es abierto $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

e) Idem:

A_i es cerrado $\Rightarrow A_i^c$ es abierto

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i^c$ es abierto $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado
