Clase auxiliar: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Raúl Uribe Auxs: Braulio Sanchez & Emilio Vilches
Miércoles 19 de Octubre de 2011

P1. Para los siguientes conjuntos, determine interior, adherencia y frontera.

a) $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1, x^2+y^2 < 1\right\}$

b) $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1)$

c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\right\}$

d) $D = \left\{\left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}\right\}$

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| < |x|^2, \ x^2+y^2 \le 5\}$

f) $F = \left\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : \ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

P2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ probar que:

a) $\|\frac{1}{2}(x+y)\|^2 \le \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$.

b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (Identidad del paralelogramo).

P3. Demuestre que las siguientes propiedades:

a) Si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$.

b) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

c) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.

d) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son abiertos entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto.

e) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

P4. Demuestre las siguientes propiedades.

a) $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{adh}(A) \subseteq \operatorname{adh}(B)$.

b) $\operatorname{adh}(A \cup B) = \operatorname{adh}(A) \cup \operatorname{adh}(B)$.

c) $\operatorname{adh}(A) \cap \operatorname{adh}(B) \supseteq \operatorname{adh}(A \cap B)$.

d) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son cerrados entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

e) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es cerrado.