Auxiliar N°Extra MA1102: Repaso para la primera prueba

Profesor: Iván Rapaport.

Auxiliares: Pedro Montealegre, Avelio Sepúlveda.

P1. Una matriz $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se llama Idempotente si $M^2 = M$. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ son tales que $A = AB$ y $B = BA$ Demuestre que A y B son idempotentes.

P2. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que $A^3 = 0$. Considere el conjunto de Matrices

$$G = \{M(\lambda) \in \mathcal{M}_{n \times n} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

donde

$$M(\lambda) = I + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2} A^2$$

(a) Pruebe que $M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

(b) Demuestre que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde $\cdot$ es el producto de matrices. Identifique $M(\lambda)^{-1}$

P3. Considere el siguiente sistema lineal donde $Ax=b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 - 2\alpha & \beta + 1 \\ 0 & 1 & -1 & \beta - \alpha \\ 0 & -2 & 2 & 2 - 2\beta \\ 2 & 0 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & 1 & \alpha + \beta - 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta - 3 \\ -1 \\ -2 \\ 4\beta - 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P4. La matriz $U \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se dice unitaria si $U^t U = I$.

(a) Sean $U, U_1, U_2 \in \mathcal{M}_{n \times n}$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible con inversa unitaria y que $U_1 U_2$ es unitaria

(b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^t u = 1$. Pruebe que $H = I - 2uu^t$ es unitaria

(c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definida como sigue

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria.

(d) Sea $U \in (\mathcal{M}_{n \times n})$ triangular superior unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores en $\mathbb{R}$ que pueden tomar los elementos de la diagonal U-