Auxiliar Extra 2: Pre-Control 2

Profesor: Iván Rapaport
Auxiliares: Waldo Gálvez V., Patricio Santis T.
24 de Noviembre de 2011

$\boxed{P1}$ $a)$ Sea E un conjunto no vacío. Considere la relación sobre $P(E)$ definida por:

$$A\Re B \Leftrightarrow \exists f : E \to E \text{ biyectiva, } f(A) = B$$

Probar que $\Re$ es relación de equivalencia.

$\boxed{P2}$ Calcular las preimágenes para las siguientes funciones:

$i)$ $x - [x]$, para 0 y 1.
$ii)$ $\left[\dfrac{x}{2}\right]$, para los números pares e impares.
$iii)$ $\dfrac{x}{[x]}$ para los números enteros, racionales.
$iv)$ Sea la función $f : P(U) \to P(U)$ definida por $f(X) = (A \setminus X)^c$, con $A \neq \phi$. Preimágen para: ϕ, A, A^c y X

$\boxed{P3}$ Probar por inducción que:

$i)$ $n^3 < 2^n$, $\forall n \geq 10$.
$ii)$ $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + ... + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in N$
$iii)$ $\forall n \in N$, 6 divide a $n^3 + 5n$
$iv)$ Sea $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$, con $(a_n)_{n\in N} \in R$. Probar que $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

$\boxed{P4}$ Se define la función $f : P(U) \times P(U) \to P(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$, para cada $(X, Y) \in P(U) \times P(U)$.

$i)$ Demostrar que $f^{-1}(\{U, \phi\}) = \{(U, \phi)\} \cup \{(X, Y) \in P(U) \times P(U) | X \subseteq Y\}$.
$ii)$ Determinar la preimágen de X, con $X \in P(U)$.

$\boxed{P5}$ Sea $p \in Z$, $p \geq 2$. Se define en $Q^+ = \{q \in Q / q > 0\}$ la relación Ω_p por:

$$x\Omega_p y \Leftrightarrow \exists \alpha \in Z, \frac{x}{y} = p^\alpha$$

$i)$ Demostrar que Ω_p es relación de equivalencia en Q^+.
$ii)$ Describir por extensión $A = \{q \in [1]_{\Omega_2} / \dfrac{1}{8} \leq q \leq 8\}$ (el listado de todos los elementos).

Propuesto:
♣ Sea $f : A \to B$ una función y τ una relación de orden en B. Se define la relación Ω en A como $x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\tau f(y)$. Demuestre que Ω es relación de orden en A, si y solo si f es inyectiva.