

Auxiliar EXTRA Control 2
MA1002-3 2010

Sebastián Balmaceda – Braulio Sánchez
Profesor: Leonardo Sánchez

Problema 7. (Esfuerzo de producción)

i) Use una sustitución adecuada para probar que la integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

es igual a la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

ii) Calcule J .

Como en el resultado pedido se ve que en lugar de $\sin$ aparece $\cos$ y viceversa es claro que el cambio de variables apropiado es $u = \frac{\pi}{2} - x$. Con este cambio se tiene que,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} - u \\ dx &= -du, \\ u &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{cuando } x = 0, \\ u &= 0, \quad \text{cuando } x = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Con ello J puede escribirse como,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - u)}{\sin(\frac{\pi}{2} - u) + \cos(\frac{\pi}{2} - u)} (-du),$$

donde intercambiando los límites de integración y usando las identidades de seno y coseno de una diferencia de ángulos se escribe como

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sen u}{\cos u + \sen u} du.$$

Para calcular J notemos que tenemos dos versiones, a saber:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, \quad \text{y} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sen x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Considerando la similitud entre las dos versiones de J resulta natural sumarlas,

$$J + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sen x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sen x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

De aquí concluimos que $2J = \frac{\pi}{2}$, es decir,

$$J = \frac{\pi}{4}$$