

Problema 5.

i) Calcular la siguiente recurrencia para $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n = \int \sec^n(x) dx$$

ii) Calcular

$$J = \int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx, \quad a \neq 0,$$

(Esfuerzo de producción 2)

Solución: Usando integración por partes, aprovechando que conocemos la primitiva de $\sec^2(x)$

$$dv = \sec^2(x) \Rightarrow v = \tan(x)$$

$$u = \sec^{n-2}(x) \Rightarrow du = (n-2)\sec^{n-2}(x)\tan(x)dx$$

Con esto

$$I_n = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2) \int \tan^2(x)\sec^{n-2}(x)dx$$

$$= \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2) \int (\sec^2(x) - 1) \sec^{n-2}(x)dx$$

Así, es fácil notar que

$$I_n = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2) (I_n - I_{n-2})$$

Con lo cual, despejando se obtiene la recurrencia pedida

$$I_n = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2}(x)\tan(x) + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

Parte ii)

Solución: Usando el cambio de variable $x = a \tan(u)$ $dx = a \sec^2(u) du$, se tiene que

$$\begin{aligned} J &= \int a^2 \tan^2(u) \sqrt{a^2 \tan^2(u) + a^2} a \sec^2(u) du = \int a^4 \tan^2(u) \sec^3(u) du \\ &= \int a^4 (\sec^2(u) - 1) \sec^3(u) du = a^4 (I_5 - I_3) \end{aligned}$$

Por lo cual, debemos calcular estas cantidades. Notando que

$$I_5 = \frac{1}{4} \sec^3(x) \tan(x) + \frac{3}{4} I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \sec(x) \tan(x) - \frac{1}{2} I_1$$

El problema se reduce a calcular $I_1 = \int \sec(x) dx$. Para calcularla, hacemos un movimiento "pro"

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx$$

Lo que coincidentemente da que el numerador corresponde a la derivada del denominador, por lo cual

$$I_1 = \int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + C$$

Por lo cual, debemos calcular estas cantidades. Notando que

$$I_5 = \frac{1}{4} \sec^3(x) \tan(x) - \frac{3}{4} I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \sec(x) \tan(x) + \frac{1}{2} I_1$$

El problema se reduce a calcular $I_1 = \int \sec(x) dx$. Para calcularla, hacemos un movimiento "pro"

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx$$

Lo que coincidentemente da que el numerador corresponde a la derivada del denominador, por lo cual

$$I_1 = \int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + C$$

Por lo cual

$$I_3 = \frac{1}{2} \sec(x) \tan(x) - \frac{1}{2} \ln |\sec(x) + \tan(x)|$$

$$I_5 = \frac{1}{4} \sec^3(x) \tan(x) + \frac{3}{8} \sec(x) \tan(x) - \frac{3}{8} \ln |\sec(x) + \tan(x)|$$

Así, y como $J = \int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^4 (I_5 - I_3)$, se concluye que

$$\int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^4 \left(\frac{1}{4} \sec^3(x) \tan(x) - \frac{1}{8} \sec(x) \tan(x) - \frac{1}{8} \ln |\sec(x) + \tan(x)| \right) + C$$