Auxiliar Control 2
MA1002 2011

Sebastián Balmaceda

Problema 0.

$Demostrar\ que$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}+\frac{1}{e}\right)\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\ \leq\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$$

$Hint: considere\ P\ mínima\ equiespaciada\ en\ [0,1]$

Problema 1.

$Sea\ f\ continua\ y\ diferenciable\ en\ [a,b], tal\ que\ |f'(x)|\leq K, \forall x\in[a,b].$

$a)\ Use\ el\ T.V.M\ para\ deducir\ que\ \forall\ p\ \in P_{[a,b]}, |S(f,p)-s(f,p)|\leq K|p|(b-a)$

$donde\ |p|=\max\{x_i-x_{i-1}\}$

$b)\ Demuestre\ que\ f\ es\ una\ función\ Riemman\ integrable\ en\ [a,b]$

$c)\ Verifique\ que\ que\ \forall\ p\ \in P_{[a,b]}\ se\ tiene:$

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}(S(f,p)+s(f,p))\right|\leq\frac{1}{2}K|p|(b-a)$$

Problema 2.

$Sea\ f:[a,b]\to\mathbb{R}\ y\ sea\ g:[a+c,b+c]\to\mathbb{R}\ \ definida\ por\ g(t)=f(t-c)$

$a)\ Dada\ una\ partición\ P=\{x_0,\dots,x_n\}\ de\ [a,b], sea\ \bar{P}=\{\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_n\}\ una\ partición\ de$
$[a+c,b+c]\ con\ \bar{x}_k=x_k+\ c$

$a)\ Demostrar\ que\ s(f,P)=s(g,\bar{P})y\ que\ S(f,P)=S(g,\bar{P})$

$b)\ Demostrar\ que\ si\ f\ es\ integrable\ en\ [a,b], g\ es\ integrable\ en\ [a+c,b+c]$

$c)\ Demostrar\ que\ \int_a^b f=\int_{a+c}^{b+c} g$

Problema 3.

$Para\ r>0\ se\ defina\ la\ región\ \mathcal{R}\ por$

$\mathcal{R}=\{(x,y)\epsilon\ \mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq r^2; x^2+\ y^2-\ 2ry\ \geq 0\ ; y\geq 0\}$

$a)\ Calcular\ el\ volumen\ del\ sólido\ engendrado\ al\ rotar\ \mathcal{R}\ en\ torno\ a\ OX$

$a)\ Calcular\ el\ volumen\ del\ sólido\ engendrado\ al\ rotar\ \mathcal{R}\ en\ torno\ a\ OY$

Problema 4.
$Sea\ A(x) el\ \text{á}rea\ entre\ a\ y\ x\ de\ una\ funci\text{ó}n\ integrable\ f(x). Calcular\ cuento\ vale\ la\ derivada$
$de\ A(x)\ y\ cuanto\ vale\ el\ \text{á}rea\ bajo\ la\ vurva\ entre\ [a,b](La\ primitiva\ de\ f\ es\ F(x)+c)$

Problema 5.
$a)\ Considera\ la\ f(x)=2x-x^2 y\ la\ regi\text{ó}n\ definida\ por$
$\mathcal{R}=\{(x,y)\epsilon\ \mathbb{R}^2\ /x\geq, f(x)\geq y\geq 0\}$

$Se\ pide\ determinar\ sobre\ el\ gr\text{á}fico\ de\ f(x) el\ punto\ P\left(x_0, f(x_0)\right)\ de\ modo\ que$
$la\ recta\ que\ une\ el\ origen\ con\ P\ divida\ el\ \text{á}rea\ de\ la\ regi\text{ó}n\ R\ en\ dos\ partes\ iguales$

Problema 6.
$a)\ Resolver\ las\ siguientes\ integrales\ indefinidas$

1. $I_n=\int sen^n(x)dx, n\ \epsilon\mathbb{N}$

2. $I_n=\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

$b)\ Usando\ los\ resultados\ \ calcular:$

1. $\int [sen^{24}(x)-\frac{23}{24}sen^{22}(x)]dx$

2. $\int [\frac{1}{(1+x^2)^{100}}-\frac{197}{198(1+x^2)^{99}}]dx$

Problema 7.
$i)\ Calcular\ la\ siguiente\ recurrencia\ para\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}.$

$$I_n=\int sec^n(x)dx$$

$ii)\ Calcular$

$$J=\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx\ , \qquad a\neq 0$$

Problema 8.

Sea f una función con derivada continua en un intervalo I que contiene a $[a, b]$.
Dado n, se define la suma S_n por:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) f'\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$a)$ *Demuestre que* $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}[f^2(b) - f^2(a)]$

$b)$ *Calcular* $\lim_{n\to\infty} [\ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1 + (\frac{i\pi}{n})^2)}]$

$c)$ *Calcular* $\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{n} \frac{arctg(\frac{i}{n})}{i^2 + n^2}$

Problema 9.

$i)$ *Use una sustitución adecuada para probar que la integral*

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{sen(x) + cos(x)} dx$$

es igual a la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(x)}{sen(x) + cos(x)} dx$$

$ii)$ *Calcule J.*