

Problema 0.

Demostrar que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{e} \right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \right)$$

Hint: considere P mínima equiespaciada en $[0,1]$

Problema 1.

Sea f continua y diferenciable en $[a, b]$, tal que $|f'(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$.

a) Use el T.V.M para deducir que $\forall p \in P_{[a,b]}, |S(f, p) - s(f, p)| \leq K|p|(b - a)$

donde $|p| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$

b) Demuestre que f es una función Riemman integrable en $[a, b]$

c) Verifique que que $\forall p \in P_{[a,b]}$ se tiene:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} (S(f, p) - s(f, p)) \right| \leq \frac{1}{2} K|p|(b - a)$$

Problema 2.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $g: [a + c, b + c] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(t - c)$

a) Dada una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, sea $\bar{P} = \{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n\}$ una partición de $[a + c, b + c]$ con $\bar{x}_k = x_k + c$

a) Demostrar que $s(f, P) = s(g, \bar{P})$ y que $S(f, P) = S(g, \bar{P})$

b) Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$, g es integrable en $[a + c, b + c]$

c) Demostrar que $\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} g$

Problema 3.

Para $r > 0$ se defina la región $\mathcal{R}$ por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2; x^2 + y^2 - 2xy \geq 0; y \geq 0\}$$

a) Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar $\mathcal{R}$ en torno a OX

a) Calcular el volumen del sólido engendrado al rotar $\mathcal{R}$ en torno a OY

Problema 4.

Sea $A(x)$ el área entre a y x de una función integrable $f(x)$. Calcular cuanto vale la derivada de $A(x)$ y cuanto vale el área bajo la curva entre $[a, b]$ (La primitiva de f es $F(x) + c$)

Problema 5.

a) Considera la $f(x) = 2x - x^2$ y la región definida por $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, f(x) \geq y \geq 0\}$

Se pide determinar sobre el gráfico de $f(x)$ el punto $P(x_0, f(x_0))$ de modo que la recta que une el origen con P divida el área de la región R en dos partes iguales

Problema 6.

a) Resolver las siguientes integrales indefinidas

$$1. I_n = \int \sin^n(x) dx, n \in \mathbb{N}$$

$$2. I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

b) Usando los resultados calcular:

$$1. \int [\sin^{24}(x) - \frac{23}{24} \sin^{22}(x)] dx$$

$$2. \int [\frac{1}{(1+x^2)^{100}} - \frac{197}{198(1+x^2)^{99}}] dx$$

Problema 7.

i) Calcular la siguiente recurrencia para $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n = \int \sec^n(x) dx$$

ii) Calcular

$$J = \int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx, \quad a \neq 0$$

Problema 8.

Sea f una función con derivada continua en un intervalo I que contiene a $[a, b]$.

Dado n , se define la suma S_n por:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) f'\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

a) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} [f^2(b) - f^2(a)]$

b) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\right)}$

c) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=1}^n \frac{\arctg\left(\frac{i}{n}\right)}{i^2 + n^2}$

Problema 9.

i) Use una sustitución adecuada para probar que la integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} dx$$

es igual a la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} dx$$

ii) Calcule J .