
Auxiliar 06 MA1002-5 2011

PRIMITIVAS II

Sebastián Balmaceda – Braulio Sánchez
Profesor: Leonardo Sánchez

Definición

(1) F continua en I , derivable en $\text{int}(I)$ es primitiva de $f \Leftrightarrow \forall x \in \text{int}(I), F'(x) = f(x)$

(2) $\int f = \{F, F \text{ es primitiva de } f\} \Leftrightarrow \{F + c, F' = f\} \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$

Observaciones:

$$\int f(x)' dx = f(x) + c$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

$$\int [f(x) + \alpha g(x)] dx = \int f(x) dx + \alpha \int g(x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Teorema Cambio de Variable:

$$\text{Si } u = g(x) \Rightarrow \int f(u) du = \int f(g(x)) g'(x) dx$$

Integración por partes

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

Problema 0.

Calcular la primitiva de $\int \sin^2(x) dx$

Problema 1.

Calcular la primitiva de $\int \frac{dx}{e^{3x} \sqrt{1 - e^{-2x}}}$

Problema 2

Calcular la primitiva de $\int \frac{\sin(x) dx}{\sin(x) + \cos(x) + 1}$

Problema 3.

Demuestre que $I_n = \int (x+a)^n \sqrt{x+b} dx$ $a, b > 0$ satisface la recurrencia:

$$I_n = \frac{2}{3+2n} (x+a)^n (x+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n(b-a)}{3+2n} I_{n-1}$$

Problema 4.

Sea $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente

(i) Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i) \quad \forall n \geq 2$$

(i) Considere $f(x) = \ln(x)$.

$$\text{Demuestre que } (n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n! \quad \forall n \geq 1$$

Problema 5.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos veces diferenciable, tal que $f'(x) + P(x)f(x) = Q(x)$

Se pretende encontrar que el tipo de funciones que satisfacen la condición.

Para ello:

(i) Resuelva la siguiente ecuación $z'(x) + P(x)z(x) = 0$

(ii) Demuestre que $fz = \int z(x)Q(x) + C_1$

(iii) Concluya

Problema 6.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1+x^2)y' = xy$$

$$x^2(yy'' + y'^2) = 1$$