$Auxiliar\ 02\ MA1002$
$Secci$ó$n\ 05 - 2011$
"**$Continuidad\ II$**"

Profesor: Leonardo Sánchez
Aux: Sebastián Balmaceda H
Braulio Sánchez

Problema 0. (Repaso)

$Demuestra\ el\ siguiente\ teorema:$
$Si\ \ f\ es\ continua\ en\ a, entonces\ existe\ \ \delta > 0\ tal\ que\ f\ es\ acotada\ superiormente\ en\ (a+\delta, a-\ \delta)$

Problema 1. (Repaso)

$Sea\ f\ una\ funci$ó$n\ continua\ en\ [a,b]\ y\ sean\ x_1, \dots, x_n \in [a,b], a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$

$Demuestra\ que\ existe\ un\ x_0 \in [a,b]\ tal\ que\ \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = f(x_0) \sum_{i=1}^{n} a_i$

Problema 2.

$Sean\ f, g: \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}\ que\ satisfacen:$

$$\forall x, y\ \in\ \mathbb{R}, f(x) \geq f(y) + g(y)(y-x)$$

$i)\ Probar\ que\ \forall x, y\ \in\ \mathbb{R}, g(x)(y-x\ ) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y-x)$
$ii)\ Probar\ que\ si\ g\ es\ acotada, entonces\ f\ es\ continuaen\ \ \mathbb{R}$
$iii)\ Probar\ que\ si\ g\ es\ continua\ en\ a\ y\ a_n \to a, entonces\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n -\ a}\ existe\ y\ vale - g(a)$

Problema 3.

$Sea\ g: \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}\ continua. Sea\ f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\ \to\ \mathbb{R}\ definida\ por\ f(x) = \max_{t\in[0,x]} g(t)$
$Demostrar\ que\ si\ x_0\ \ \in \mathbb{R}^+\ es\ tal\ que\ g(x_0) \leq f(x_0), entonces\ existe\ \varepsilon > 0\ tal\ que$
$f\ es\ constante\ en\ [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

Problema 4.

$Analice\ la\ continuidad\ de\ la\ funci$ó$n\ f(x) = \frac{sen(\pi x)}{x(x-1)}\ y\ exti$é$ndela, si\ es\ posible, de\ manera\ que\ sea$
$continua\ en\ todo\ \mathbb{R}\ (reparar\ discontinuidades)$

Problema 5.

$Sean\ f, g: [a,b] \to\ \mathbb{R}continuas\ tales\ que\ f(x) < g(x)\ para\ todo\ x \in [a,b].$
$Probar\ que\ existe\ \lambda < 0, tal\ que\ para\ todo\ x \in [a,b], f(x) +\ \lambda < g(x)$