$Auxiliar$ 01 $MA1002$
$Secci$ón 05 − 2011
"$Continuidad\ I$"

Profesor:Leonardo Sánchez
Sebastián Balmaceda H
Braulio Sánchez

Problema 0.

$Dada\ la\ función\ h(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}, con\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, a \neq 0, d \neq 0. Analice\ su\ continuidad.$

Problema 1.

$Dada\ la\ función\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 2\ \ si\ x \in [0,3] \\ ax + b\ si\ x\ \in [3,5] \end{cases}\quad calcular\ a\ y\ b\ de\ modo\ que:$

$a)\ y = ax + b\ pase\ por\ el\ origen\ y\ la\ función\ f\ sea\ continua\ en\ x = 3.$

$b)\ y = ax + b\ tenga\ pendiente - 2\ y\ f\ sea\ continua\ en\ x = 3.$

Problema 2.

$a)\ Sea\ \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ una\ función\ continua\ en\ x_0 = 0\ y\ tal\ que\ \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{n}\right) > 0.$

$Demuestre\ que\ f(0)\ no\ puede\ ser\ estrictamente\ negativo.$

$b)\ Sea\ h: (0, \infty) \to [0,1] una\ función\ que\ satisface\ h(xy) = h(x) +\ h(y)$

$Demuestre\ que\ si\ h\ es\ continua\ en\ x = 1, entonces\ h\ es\ continua\ en\ todo\ su\ dominio.$

$c)\ Sea\ f, g: [0,1] \to [0,1]\ funciones\ continuas\ con\ g(0) = 0\ y\ f(1) = 0.$

$Demuestre\ que\ existe\ un\ x_0\ \in [0,1]\ tal\ que\ f(x_0) = g(x_0).$

Problema 3.

$a)\ Sea\ \ f: [0,1] \to \mathbb{R}\ \ definida\ de\ la\ forma\ f(x) = \begin{cases} x \quad si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x\quad si\ x\ \in \mathbb{I} \end{cases}\ \ Demuestre\ que:$

1) $f\ es\ inyectiva\ \ \in\ [0,1].$
2) $f\big(f(x)\big) = x\ para\ todo\ x\ \ es\ inyectiva\ \ \in\ [0,1].$
3) $f\ sólo\ es\ continua\ en\ x = \frac{1}{2}$

$b)\ Sea\ \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ función\ continua. Pruebe\ que\ si\ Im(f) \subseteq \mathbb{Q}, entonces\ f\ es\ constante.$

Problema 4.

$Se\ dice\ que\ una\ función\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ es\ lipchitziana\ de\ constante\ k\ \in \mathbb{R}\ si\ verifica\ la\ propiedad$

$$\forall\, x, y\ \in \mathbb{R}; |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

$Pruebe\ que\ una\ función\ lipchitziana\ de\ constante\ k \geq 0\ es\ continua\ en\ su\ dominio.$

Problema 5.

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & si\ x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & si\ x < 0 \\ \beta & si\ x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Problema 6.

Dado $a \geq 0$, sea $f_a(x) = ax^3 + x - 1$

$a)$ *Demuestre la existencia y unicidad de $z \in [0,1]$ tal que $f_a(z) = 0$*

$b)$ *Sea $g\ [0,\infty) \to [0,1]$ la función que a cada $a \geq 0$ le asocia la solución $z \in [0,1]$ de $f_a(z) = 0$*
Pruebe que g es continua

Hint: Puede ser útil demostrar que si

$$au^3 + u - 1 = 0$$
$$bv^3 + v - 1 = 0$$

$$Con\ a, b \geq 0, entonces\ [b(u^2 + uv + u^2) + 1](u - v) = u^3(b - a)$$

Problema 7.

Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & si\ x < 0 \\ b(x-\alpha)^2 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln(x)} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Dónde a y b son parámetros reales con $a \neq 0$, $a \neq 1$

$a)$ *¿Qué puede decir de la continuidad de f en los intervalos $(-\infty, 0), (0,1), (1, \infty)$? Justifique.*

$b)$ *Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 0.*

$c)$ *Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 1.*

$d)$ *Encuentre los valores de a y b, con $a \neq 0$, $a \neq 1$, tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.*

Problema 8.

Estudie la continuidad en los puntos 0 y 1 de la función $f(x) = [x]x$.

Problema 9.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $r_n > 0$ sucesión tal que $r_n \to 0$.

Probar que f es continua en x^* si y solo si la sucesión

$$s_n = \sup_x \{|f(x) - f(x^*)| : |x - x^*| \leq r_n\}$$

converge a cero.