IN7K3-1 Flujos en Redes - Verano 2011	3 de noviembre 2011

Auxiliar 3-Pauta

Profesor: Fernando Ordóñez — *Auxiliar: Renaud Chicoisne*

P1.

$d_s := 0$, y $p_s := 0$;
$d_j := -\infty, \forall j \in N \setminus \{s\}$
$T := \{s\}$;
WHILE $T \neq \emptyset$
    $k := \arg\max_{i \in T} \{d_i\}$
    $T := T \setminus \{k\}$;
    $\forall j : (k, j) \in E$
        IF $d_j < \min\{c_{kj}, d_k\}$ THEN $d_j := \min\{c_{kj}, d_k\}$; $p_j := k$;

P2.

El problema primal de transporte puede ser formulado de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.t.:} & & \\
& \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = b_i & ,\forall i \in V \\
& x_{ij} \geqslant 0 & ,\forall (i,j) \in E
\end{array}
$$

El problema dual se deriva como el problema:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i\in V} b_i u_i \\
\text{s.t.:} & \\
& u_i - u_j \leqslant c_{ij}, \forall (i,j) \in E
\end{array}
$$

Las condiciones de holgura complementaria cumplen con la siguiente relación:

$$x_{ij}(u_i - u_j - c_{ij}) = 0, \forall (i,j) \in E$$
$$\text{ie: } u_i = u_j + c_{ij}, \forall (i,j) \in E : x_{ij} \text{ es variable básica}$$

P3.

Sea $G = (V, E)$ el grafo original. Construyamos el grafo $G' = (V', E')$ de la siguiente manera.

Para cada nodo $i \in V \setminus \{s, t\}$ se crean dos nodos i^+ y i^- y el arco (i^+, i^-) de capacidad 1 y costo cero.

Si existe un arco $(i,j) \in E, i \neq s, j \neq t$ se crea el arco $(i^-, j^+) \in E'$

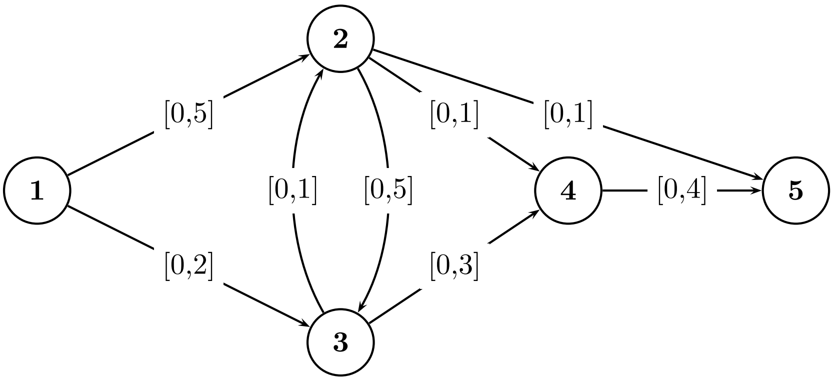
Para cada arco $(s,j) \in E$ se agrega el arco $(s, j^-) \in E'$, y para cada arco $(i,t) \in E$ se agrega el arco $(i^+, t) \in E'$ de capacidades y costos identicos u_{sj}, c_{sj} y u_{it}, c_{it} respectivamente. Todos los nodos tienen demanda cero excepto s que ofrece k unidades y t que demanda k unidades. Si el problema original tiene solución entonces el problema de flujo a costo mínimo en el grafo G' tiene también solución, y su solución óptima es la del problema original.

P4.

En las proximas figuras, los valores en cada arco (i,j) representarán el flujo f_{ij} pasando por este arco, y la capacidad en el grafo residual u^f_{ij} de este arco: $[f_{ij}, u^f_{uij}]$.

Initialización:

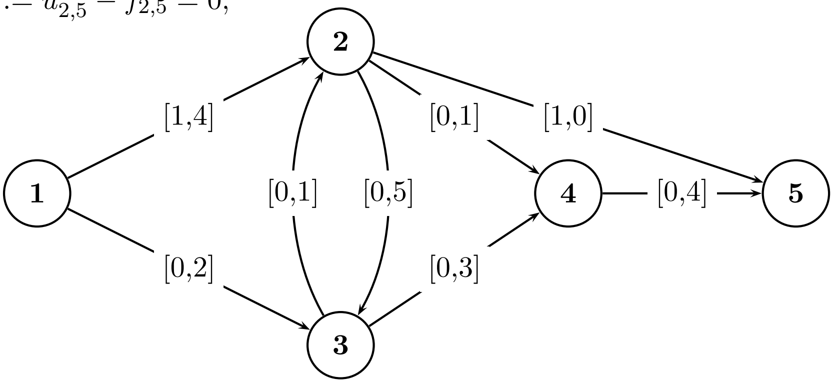
$f_{ij} := 0; \forall (i,j) \in E$
$u^f_{ij} := u_{ij}; \forall (i,j) \in E$



Iteración 1:

El camino $\{1,2,5\}$ es aumentante y se puede empujar min $\left\{u^f_{1,2} = 5, u^f_{2,5} = 1\right\} = 1$ unidades de flujo.

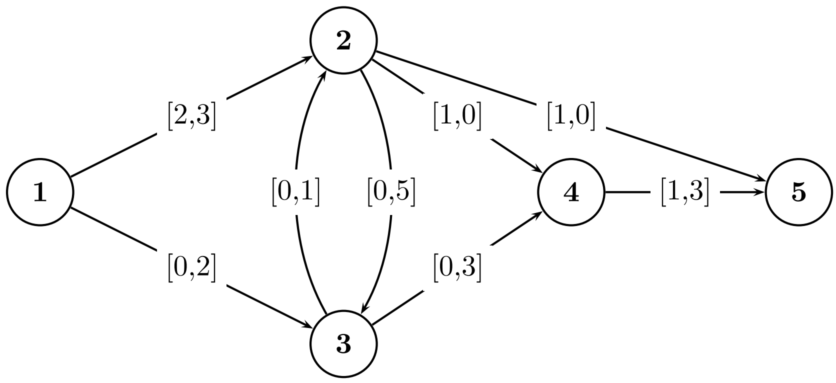
Se actualizan los flujos y las capacidades residuales de este camino: $f_{1,2} := f_{1,2} + 1 = 1$; $u^f_{1,2} := u^f_{1,2} - f_{1,2} = 4$; $f_{2,5} := f_{2,5} + 1 = 1$; $u^f_{2,5} := u^f_{2,5} - f_{2,5} = 0$;



Iteración 2:

El camino $\{1,2,4,5\}$ es aumentante y se puede empujar min $\left\{u^f_{1,2} = 4, u^f_{2,4} = 1, u^f_{4,5} = 4\right\} = 1$ unidades.

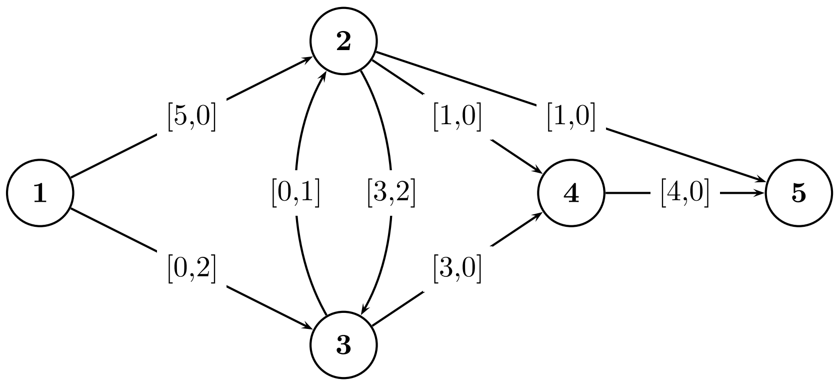
Se actualizan los flujos y las capacidades residuales de este camino: $f_{1,2} := f_{1,2} + 1 = 2$; $u^f_{1,2} := u^f_{1,2} - f_{1,2} = 3$; $f_{2,4} := f_{2,4} + 1 = 1$; $u^f_{2,4} := u^f_{2,4} - f_{2,4} = 0$; $f_{4,5} := f_{4,5} + 1 = 1$; $u^f_{4,5} := u^f_{4,5} - f_{4,5} = 3$;



Iteración 3:

El camino $\{1,2,3,4,5\}$ es aumentante y se puede empujar $\min\left\{u^f_{1,2}=3, u^f_{2,3}=5, u^f_{3,4}=3, u^f_{4,5}=3\right\}=3$ unidades.

Se actualizan los flujos y las capacidades residuales de este camino: $f_{1,2}:=f_{1,2}+3=5$; $u^f_{1,2}:=u^f_{1,2}-f_{1,2}=0$; $f_{2,3}:=f_{2,3}+3=3$; $u^f_{2,3}:=u^f_{2,3}-f_{2,3}=2$; $f_{3,4}:=f_{3,4}+3=3$; $u^f_{3,4}:=u^f_{3,4}-f_{3,4}=0$; $f_{4,5}:=f_{4,5}+3=4$; $u^f_{4,5}:=u^f_{4,5}-f_{4,5}=0$;



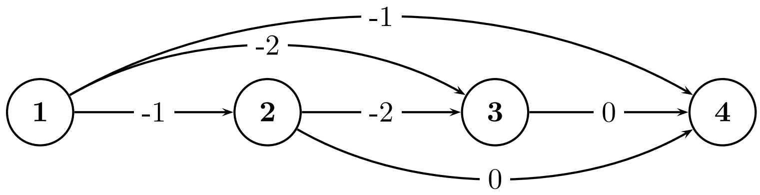
Iteración 4:

No hay caminos aumentantes entre 1 y 5: el algoritmo para con el flujo actual que vale 5.

El corte $S=\{1,2,3\}$ separa el nodo 1 del nodo 5 y tiene capacidad $u_{3,4}+u_{2,4}+u_{2,5}=5$ lo que es exactamente el valor del flujo encontrado y por lo tanto confirma la optimalidad del flujo.

P5.

Se construye el grafo $G = (V, E)$ de la manera siguiente: para cada palabra i se crea un nodo $i \in V$. Cada palabra i puede ser el principio de una línea que termina por la palabra $j-1$ si y solamente si $j > i$. Por este motivo, para cada palabra $i \in V$ se crean sólo arcos hasta todos los nodos $j > i$. Cada arco $(i, j) \in E$ así creado tiene costo $-c_{ij}$. Se nota que el grafo es dirigido, entonces aúnque todos los costos puedan ser negativos, no existe ciclo negativo adentro de G. La figura muestra un ejemplo del grafo con 4 palabras.



Encontrar un camino más corto desde 1 a n nos da exactamente la descomposicón del párrafo la más linda.

P6.

Un grafo bipartito $G = (V, E)$ es un grafo tal que se puede encontrar una partición $(S, \bar{S})$ de V tal que $\forall (i,j) \in E$ se tiene que $(i,j) \in S \times \bar{S}$ o bien $(i,j) \in \bar{S} \times S$. De esta observación se deduce que $\forall (i,j) \in S \times S \cup \bar{S} \times \bar{S}, H_{ij} = 0$.

Si se reindexan todos los índices originales de V poniendo todos los índices de los nodos de S primeros y luego todos los de $\bar{S}$. Definiendo F y E como las matrices definiendo los arcos saliendo de S y $\bar{S}$ respectivamente, se tiene que la matríz de adjacencia reindexada tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & F \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

P7.

Sean $u_1(m,n) = O(mn)$, $u_2(n) = O(n^2)$ y $u_3(m,n)$ el número de veces que se ejecutan las operaciones 1, 2 y 3 respectivamente. También definemos $c_1(n) \leqslant n$, $c_2 = 1$ y $c_3(n,m) \leqslant -1$ como los incrementos a ϕ que hacen las operaciones 1, 2 y 3 respectivamente.

Se tiene que:

$$\phi = c_1(n)u_1(m,n) + c_2 u_2(n) + c_3(n,m)u_3(m,n) \leqslant O(mn^2) + O(n^2) - u_3(m,n)$$

$$\text{ie: } u_3(m,n) \leqslant O(mn^2) - \phi$$

Y se sabe que $1 \leqslant \phi \leqslant n^2$, por lo tanto:

$$u_3(m,n) \leqslant O(mn^2) - 1 = O(mn^2)$$

Finalmente tenemos: $u_3(m,n) = O(mn^2)$

P8.

1. Sea v_k el valor del flujo durante la iteración k. Se tiene la siguiente relación de recurrencia: $v_{k+1} \geqslant \frac{v^* - v_k}{m} + v_k$. Por inducción se puede mostrar que tenemos:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &\geqslant \frac{v^*}{m} \sum_{i=0}^{j} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^i + v_{k-j}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{j+1} \\ &\geqslant v^* \left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k\right) + v_{k-j}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{j+1} \end{aligned}$$

Definiendo $q = 1 - \frac{1}{m}$, y sabiendo que $v_0 = v$ tenemos:

$$v_k \geqslant v^* + q^k(v - v^*)$$

Queremos encontrar k tal que $v_k \geqslant v^*$. Dada la integralidad de los flujos, es suficiente encontrar k tal que:

$$\begin{gathered} q^k(v - v^*) > -1 \\ \text{ie: } k > \frac{\ln(v^* - v)}{\ln\left(\frac{m}{m-1}\right)} \\ \text{ie: } k \geqslant \bar{k} = \lceil \frac{\ln(v^* - v)}{\ln\left(\frac{m}{m-1}\right)} \rceil + 1 \end{gathered}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{gathered} v_{\bar{k}} \geqslant v^* + q^{\bar{k}}(v - v^*) > v^* - 1 \\ \text{ie: } v_{\bar{k}} \geqslant v^* \end{gathered}$$

2. Sea z_k el costo del camino durante la iteración k. Se tiene la siguiente relación de recurrencia: $z_{k+1} \leqslant z_k - \frac{z_k - z^*}{2n^2}$. Por inducción se puede mostrar que tenemos:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &\leqslant z_{k-j}(1-q)^{j+1} + z^* q \sum_{i=0}^{j} (1-q)^i \\ &\leqslant z(1-q)^{k+1} + z^*(1 - (1-q)^{k+1}) \end{aligned}$$

Definiendo $q = \frac{1}{2n^2}$, y sabiendo que $z_0 = z$. Entonces se tiene:

$$z_k \leqslant z^* + (1 - q^k)(z - z^*)$$

Queremos encontrar k tal que $z_k \leqslant z^*$. Dada la integralidad de los costos, es suficiente encontrar k tal que:

$$\begin{gathered}(1-q^k)(z-z^*) < 1 \\ \text{ie: } k > \frac{\ln(z-z^*)}{\ln\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)} \\ \text{ie: } k \geqslant \bar{k} = \lceil \frac{\ln(z-z^*)}{\ln\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)} \rceil + 1\end{gathered}$$

Entonces tenemos:

$$z_{\bar{k}} \leqslant z^* + (1-q^{\bar{k}})(z-z^*) < z^* + 1 \text{ ie: } z_{\bar{k}} \leqslant z^*$$