

IN5602 – Marketing II

Modelos de Comportamiento: Estimación y Heterogeneidad

Marcel Goic (mgoic@dii.uchile.cl)
Semestre Primavera2011

1

Ejemplo

Proyección de Retención de Clientes

2

Motivación

Consideremos un cohorte de
1000 clientes capturados en
el mismo periodo.

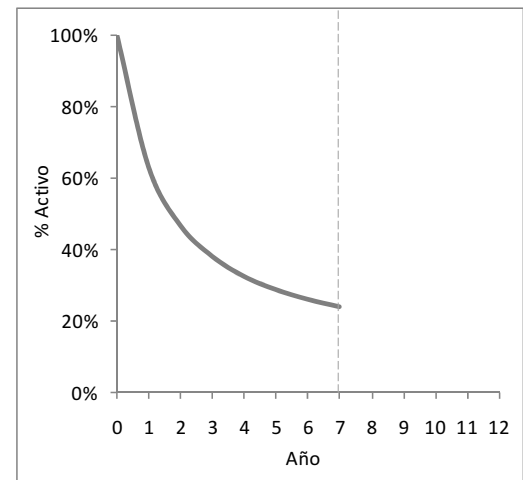
Año	#Clientes	%Activo
0	1000	100%
1	631	63%
2	468	47%
3	382	38%
4	326	33%
5	289	29%
6	262	26%
7	241	24%

Data Mining Techniques (Berry and Linoff, 2004)

3

Objetivo de la Modelación

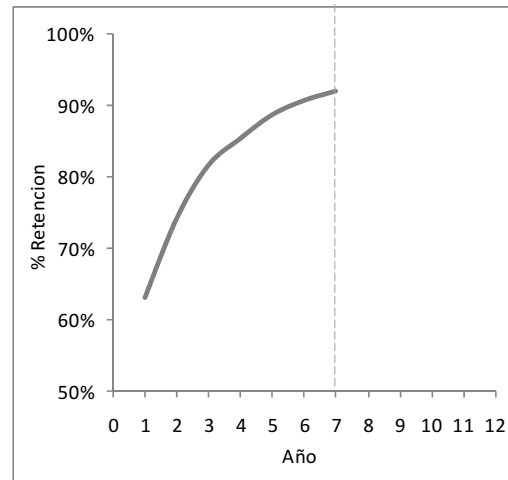
Queremos desarrollar un
modelos que nos permita
proyectar las *curvas de
sobrevivencia* (y por tanto las
tasas de retención) en los
próximos 5 años (es decir
hasta el periodo 12).



4

Tasas de Retención

La tasa de retención para el periodo t se define como la proporción de clientes que renueva su contrato al final del periodo $t-1$ y que renueva su contrato al final del periodo t



Punto de partida natural/típico

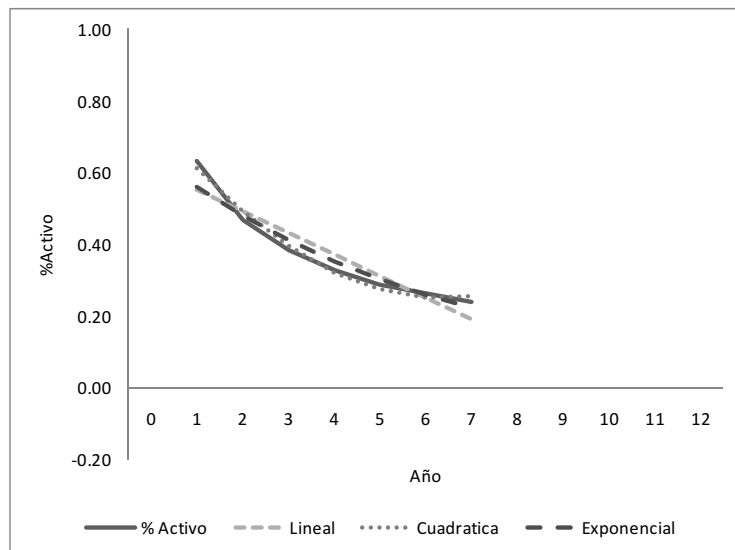
- Modelo de regresión usando el tiempo como variable explicativa.
- Sea y la proporción de clientes que siguen activos en el periodo t .

$$y = 0.61 - 0.06t \quad \text{lineal}$$

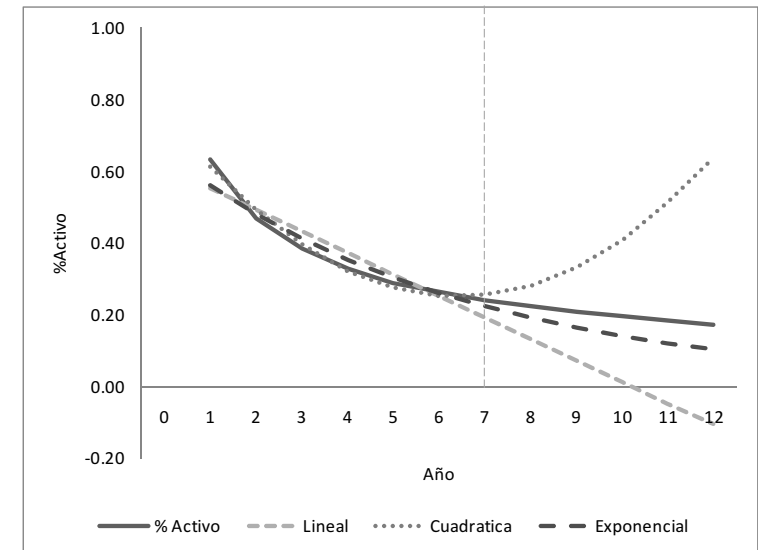
$$y = 0.76 - 0.16t + 0.12t^2 \quad \text{cuadrática}$$

$$\ln(y) = -0.43 - 0.16t \quad \text{exponencial}$$

Ajuste del Modelo



Proyección



Mejorando el modelo

- Premisa:
 - describir un proceso (historia) que pueda generar los datos que observamos.
 - El proceso dependerá de uno o mas parámetros que debemos estimar.
- Un modelo sencillo:
 - Al final de cada periodo, cada cliente abandona la compañía con una probabilidad θ (y renueva con probabilidad $1-\theta$).
 - Partiremos asumiendo que todos los clientes tienen la misma probabilidad θ .

Formalmente

- Sea T la variable la duración de la relación del cliente con la compañía.
- De acuerdo a nuestra descripción, la variable aleatoria T sigue una distribución geométrica desplazada (sG) con parámetro θ .

$$\Pr(T = t | \theta) = \theta(1-\theta)^{t-1} \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Pr(T > t | \theta) = (1-\theta)^t \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Estimación del Modelo

- Estimamos los parámetros del modelo usando el método de la máxima verosimilitud :
 - La función de verosimilitud se define como la probabilidad de observar la muestra de datos para un conjunto (desconocido) de parámetros dado.
- Esta probabilidad se calcula condicional en el modelo y por tanto es una función de los parámetros.

$$L(\text{parámetros} | \text{data}) = p(\text{data} | \text{parámetros})$$

- Para un conjunto de datos dado, los estimadores máximo-verosímiles son los que maximizan $L(\cdot)$

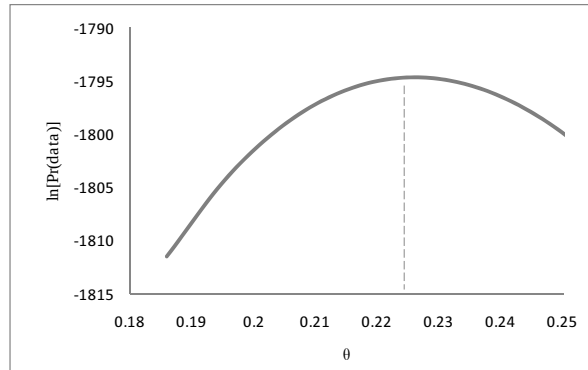
Función de Verosimilitud

La probabilidad de observar un determinado numero de abandonos cada año como función de θ se deriva directamente.

La función de verosimilitud resulta de considerar la probabilidad conjunta de todos los abandonos por año.

Año	#Clientes	#Abandonos	Pr
0	1000		
1	631	369	θ^{369}
2	468	163	$((1-\theta)^1\theta)^{163}$
3	382	86	$((1-\theta)^2\theta)^{86}$
4	326	56	$((1-\theta)^3\theta)^{56}$
5	289	37	$((1-\theta)^4\theta)^{37}$
6	262	27	$((1-\theta)^5\theta)^{27}$
7	241	21	$((1-\theta)^6\theta)^{21}$
>7			$((1-\theta)^7)^{241}$

Estimación del Parámetro θ



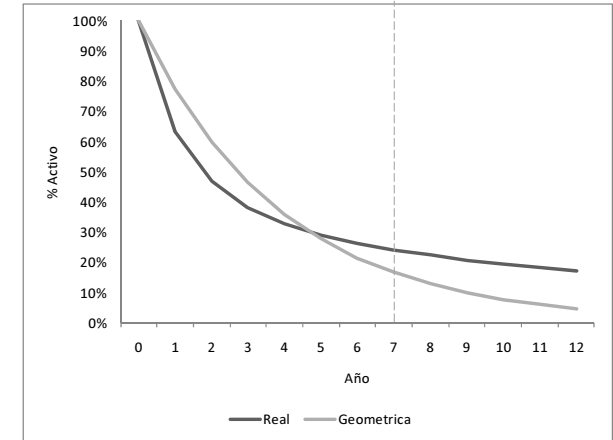
θ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\ln[\text{Pr}(\text{data})]$	-1801.51	-1840.81	-2023.10	-2327.59	-2769.16

$$\theta^* = \arg \max \left\{ \ln \left[\text{Pr}(\text{data} | \theta) \right] \right\}$$

Problema de programación continua (convexa)

Resultados: Modelo Homogéneo

El máximo de la log-verosimilitud es $LL = -1794.62$ que ocurre $\theta = 0.226$



Heterogeneidad

- Un concepto fundamental en marketing es que los clientes son diferentes.
- Necesitamos un modelo de heterogeneidad:
 - Discreta (grupos de clientes) o Continua (cada cliente es diferente)
- Modelo mas sencillo: Hay solo dos tipos de clientes con distintas probabilidades de abandonar.

Segment	Pr. Abandonar
1	θ_1
2	θ_2

Modelo de Mezcla Finita

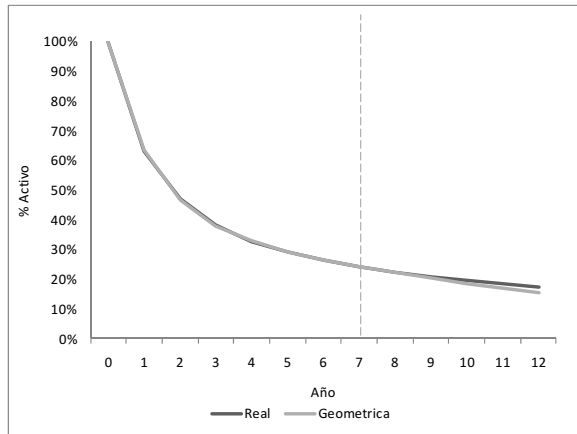
- Calculamos la distribución de la duración usando la ley de probabilidades totales ($\Pr(x) = \Pr(x|a)\Pr(a) + \Pr(x|b)\Pr(b)$)
- Formalmente:

$$\Pr(T = t | \theta_1, \theta_2, \pi) = \theta_1 (1 - \theta_1)^{t-1} \pi + \theta_2 (1 - \theta_2)^{t-1} (1 - \pi) \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Pr(T > t | \theta_1, \theta_2, \pi) = (1 - \theta_1)^t \pi + (1 - \theta_2)^t (1 - \pi) \quad t = 1, 2, 3, \dots$$
- A este modelo le llamamos una “mezcla finita” de distribuciones geométricas.

Resultados: sG - 2 segmentos

El máximo de la log-verosimilitud es $LL = -1680.05$ que ocurre en $\theta_1 = 0.083$, $\theta_2 = 0.586$ y $\pi = 0.439$



Heterogeneidad Discreta y Continua

- En el modelo de heterogeneidad **discreta** asumimos que la probabilidad de abandono θ sigue una distribución discreta (e.g. bernoulli(π))

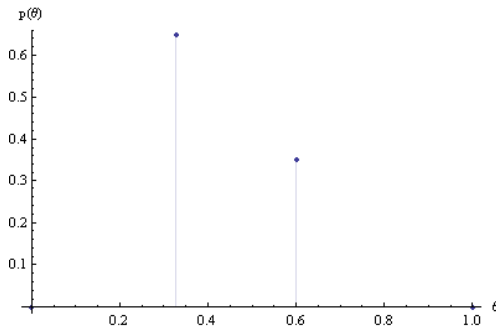
$$\begin{aligned} p(\theta = \theta_1 | \pi) &= \pi \\ p(\theta = \theta_2 | \pi) &= 1 - \pi \end{aligned} \quad \pi \in [0,1], \theta \in (0,1)$$

- En el modelo de heterogeneidad **continua** asumimos que la probabilidad de abandono θ sigue una distribución continua (e.g. beta(α, β))

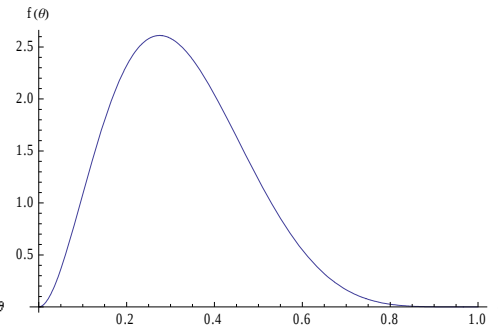
$$f(\theta | \alpha, \beta) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0, \theta \in (0,1)$$

Heterogeneidad Discreta y Continua

Distribución Discreta



Distribución Continua



- Con suficientes segmentos podemos aproximar una distribución continua.

Modelo de Mezcla Continua

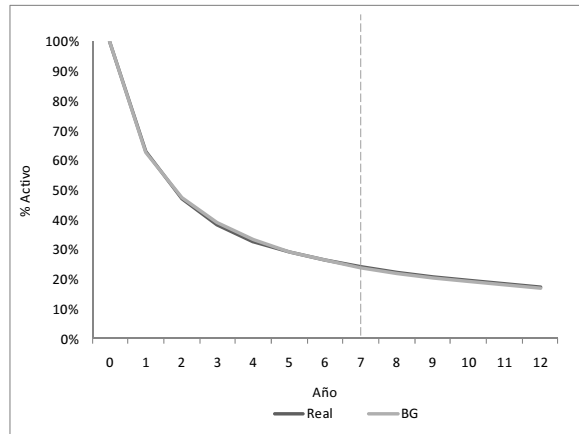
- Calculamos la distribución de la duración puede calcularse usando la siguiente recursión:

$$\Pr(T=t | \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} & t = 1 \\ \frac{\beta + t - 2}{\alpha + \beta + t - 1} \Pr(T=t-1 | \alpha, \beta) & t = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Este modelo le llamamos una “mezcla continua” de distribuciones geométricas.
- Como usamos una distribución Beta para la heterogeneidad, nombramos este modelo Beta-Geométrica desplazada (sBG).

Resultados: beta-geométrica

El máximo de la log-verosimilitud es $LL = -1680.27$ que ocurre en $\alpha = 0.7041$, y $\beta = 1.1820$



Conceptos y Herramientas Introducidas

- Modelos probabilísticos.
- Estimador Máximo Verosímil.
- Heterogeneidad.
 - Modelos de mezcla discreta (sG-2seg)
 - Modelos de mezcla continua. (sBG)

IN5602 – Marketing II

Modelos de Comportamiento: Estimación y Heterogeneidad

Marcel Goic (mgoic@dii.uchile.cl)

Semestre Primavera 2011