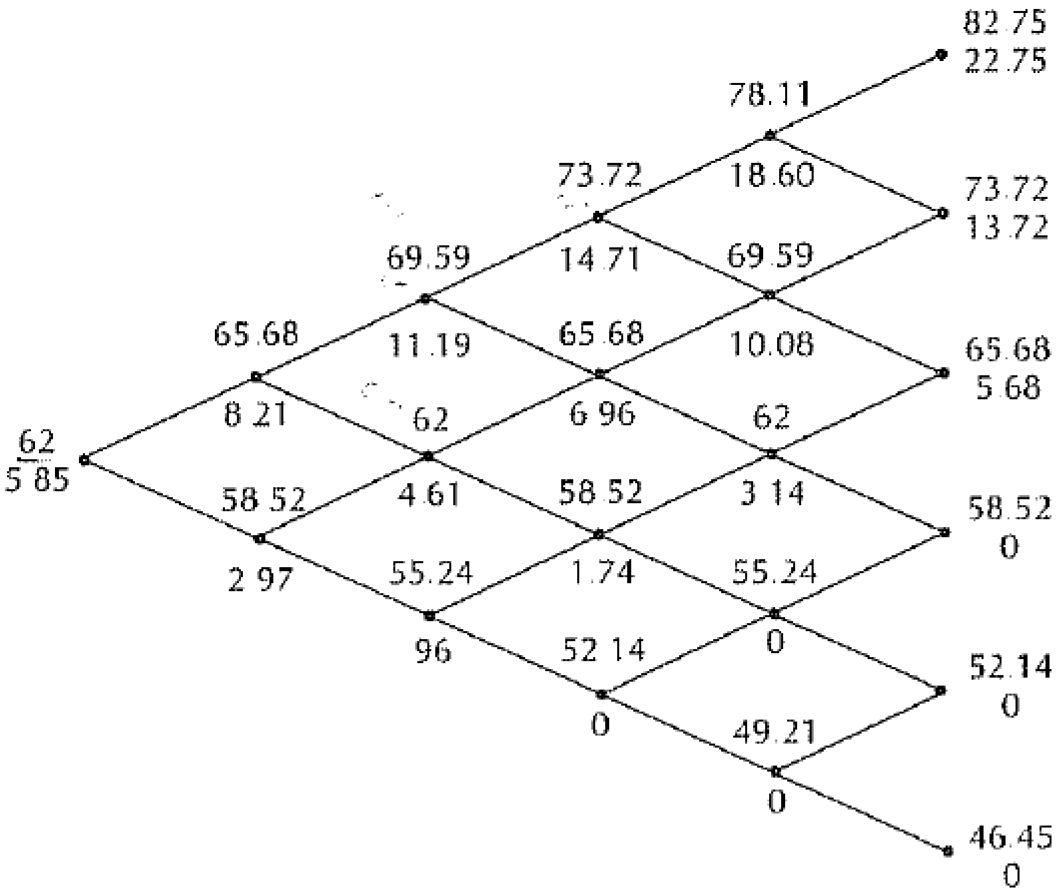
Auxiliar N°9

Pregunta 1

Sea una acción con volatilidad 20% y precio \$62. Considere una opción call a 5 meses con precio de ejercicio \$60 y tasa de interés 10% anual compuesta mensual. Calcule el valor de la opción call.

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} &&= 1.05943 \\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} &&= .94390 \\
R &= 1 + .1/12 &&= 1.00833.
\end{aligned}
$$

$$q = (R - d)/(u - d) = .55770.$$



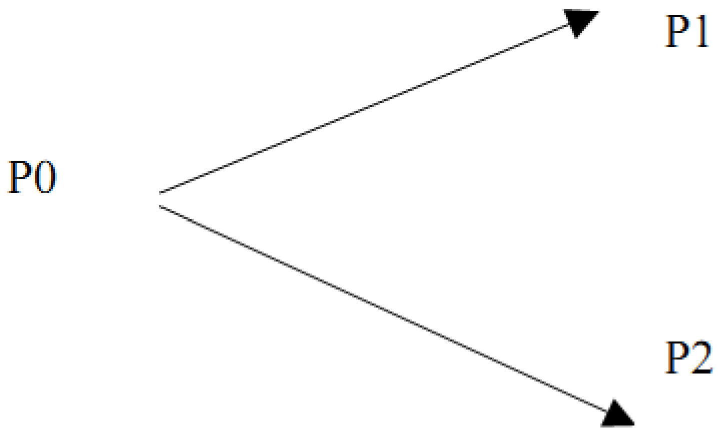
Pregunta 2

Suponga que $dP / P = \mu'_P \, dt + \sigma'_P \, dz$

Es el proceso para un precio de un activo en el mercado accionario.

a. Si P0=1, µP es 12% anual, y σP es 40% anual, se pide que encuentre u =1/d tales que

P1=uxP0, P2=dxP0, de tal forma que representen una buena aproximación del proceso estocástico de precios para el siguiente árbol semanal:



$$\mu_{Psem} = \frac{\mu_p}{t} = \frac{12\%}{52} = 0{,}23\%$$

$$\sigma_{Psem} = \frac{\sigma_P}{\sqrt{t}} = \frac{40\%}{\sqrt{52}} = 5{,}55\%$$

Es decir, $u = e^{\sigma_P \sqrt{\Delta t}} = 1{,}057$, d=0,946

b. Encuentre las probabilidades neutras al riesgo, sabiendo que la tasa libre de riesgo es 3% anual.

$$(1 + r_{anual}) = (1 + r_{semanal})^{52}$$

$$r_{semanal} = 0{,}057\%$$

$$q = \frac{(1 + r_{semanal}) - d}{u - d} = 0{,}49126$$

c. Usando el árbol calibrado anteriormente valorice hoy un derivado que paga al final de tres semanas la diferencia entre 1 y el precio del activo en la semana 3. Comente su resultado.

Árbol de precios.

Semana 0	1	2	3
			1.18106
		1.11733	
	1.05704		1.05704
1		1	
	0.94604		0.94604
		0.89499	
			0.8467

Árbol del instrumento.

Semana 0	1	2	3
			-0.18106
		-0.11790177	
	-0.05818107		-0.05704
-0.00171337		-0.00057213	
	0.05281733		0.05396
		0.10443638	
			0.15330

d. Valorice un instrumento derivado que paga al final de tres semanas el máximo entre la rentabilidad del precio del activo accionario o bien la rentabilidad de un depósito a plazo a tres semanas.

retorno 3 semanas	0.00171097

Notamos que la rentabilidad del precio del activo en 3 semanas es $\frac{P_3-P_0}{P_0}=P_3-1$. Esto es igual al opuesto de lo obtenido en la semana 3 n el instrumento de la parte anterior. Luego no es necesario rehacer el árbol de precios.

Árbol del instrumento

Semana 0	1	2	3
			0.18106
		0.11790177	
	0.0725719		0.05704
0.04328386		0.02887675	
	0.015048		0.00171
		0.00171	
			0.00171

La rentabilidad es de un 4,33%.

Pregunta 3

Calcule el valor de la call del ejercicio 1 usando Black – Scholes.

$$C(S,t) = N(d_1)\ S - N(d_2)\ Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

$$\sigma = 0.2$$

$$r = 0.1$$

$$S(0) = 62$$

$$K = 60$$

$$T = \frac{5}{12} \text{(en años)}$$

t=0

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{62}{60}\right) + \frac{\left(0.1 + \frac{0.2^2}{2}\right)5}{12}}{0.2 * \sqrt{\frac{5}{12}}} = \frac{0.033623}{0.12910} = 0{,}26044$$

$$d_2 = d_1 - 0.2 * \sqrt{\frac{5}{12}} = 0.13134$$

$$N(d_1) = 0.60274$$

$$N(d_2) = 0.55225$$

$$C(S,0) = 0.60274 * 62 - 0.55225 * 60 * e^{-0.1*\frac{5}{12}} = 37.370 - 31.783 = 5.587$$

Pregunta 4 (árboles con dividendos)

El precio actual de la acción de la empresa "FCO" es $40. Se sabe que el próximo período el precio de la acción puede aumentar en un 10.6% o caer en un 9.6%. La tasa de interés libre de riesgo es de un 8% anual.

a) Derive un modelo binomial de tres períodos para el precio de "FCO" (esto es, use un mes para cada rama del árbol). Encuentre u, d, r y p.

b) Encuentre el precio al cual se transa hoy día una put europea sobre la acción de "FCO", con vencimiento a tres meses y precio de ejercicio de $45.

c) Ahora Ud. Se da cuenta de que realmente la opción era americana. Encuentre el precio de la put americana y explique.

d) Suponga que se anuncia la repartición de un dividendo de $10 por acción en un mes más. Valorice nuevamente la put americana de la parte c). ¿Es el precio encontrado mayor o menor al de la parte c)? Explique.

a)

S(t)=40

u=1+10,6%=1,106

d=1-9,6%=0,904

r*=1+r=(1+0,08)^(1/12)=1,0064 (r tiene relación con el período de cada rama del árbol binomial. En este caso son de 1 mes = 1/12 años)

p=(1,0064-0,904)/(1,106-0,904)=0,507 , una forma de ver si uno se equivocò en algo es comprobar que p sea menor que 1 y mayor que cero. Si da un valor fuera de ese rango hay algo mal en r, en u y/o en d.

t=0	t=1	t=2	t=3
			48,93*1,106=54,12
		44,23*1,106=48,93	
	40*1,106=44,24		44,24
40		44,24*0,904 =36,16*1,106 =40	
	40*0,904=36,16		36,16
		36,16*0,904=32,69	
			29,55

OJO: Como se puede observar en este ejemplo y en los anteriores existe una repetición de ciertos valores. Por ejemplo el periodo "ud" es 44,24 y el período "uud" también es 44,24; así como lo que pasa en otros periodos. Esto se conoce como árbol recombinante. NO TODOS LOS ARBOLES SON ASÍ. Para que un árbol se recombine se tiene que dar la condición de que u*d = 1

Además no siempre u y d son constantes, lo que provoca que el nodo "udu" puede ser distinto al nodo "duu".

b)

La función de pagos de una put es p(t)=max(0,k-S(t)). En este caso la opción es europea, por lo tanto sólo se puede ejercer en la fecha del contrato, T. Por lo tanto, el problema se reduce a calcular el valor presente del valor esperado del contrato.

t=0	t=1	t=2	t=3
			Max(45-54,12;0)=0
		(0*p+0,76(1-p))/r*=0,37	
	(0,37p+4,71(1-p))/r*=2,5		Max(45-44,24;0)=0,76
(2,5p+8,26(1-p))/r*=5,31		(0,76p+(1-p)15,45)/r*=4,71	
	(4,71p+(1-p)15,45)/r*=8,26		Max(45-36,16;0)=8,84
		(8,84p+(1-p)15,45)/r*=12,02	
			Max(45-29,55;0)=15,45

La put vale 5,31

c)

En este caso la opción al ser americana puede ser ejercida en cualquier momento. Por lo tanto hay que comparar en cada nodo si conviene o no.

t=0	t=1	t=2	t=3
			Max(45-54,12;0)=0
		Esperar: (0p+0,76(1-p))/r* =0,37 (*) Ejercer: Max(0;45-48,93)=0	
	Esperar: (0,37p+5(1-p))/r* =2,63 (*) Ejercer: max(45-44,24)=0,76		Max(45-44,24;0)=0,76
(2,63p+8,84(1-p))/r* =5,66		Esperar: (0,76p+8,84(1-p))/r* =4,71 Ejercer: Max(0;45-40)=5 (*)	
	Esperar: (5p+12,31(1-p))/r* = 8,54 Ejercer: max(45-36,16)=8,84 (*)		Max(45-36,16;0)=8,84
		Esperar: (8,84p+15,45(1-p))/r* =12,02 Ejercer: Max(0;45-32,69) =12,31 (*)	
			Max(45-29,55;0)=15,45

La put vale 5,66 .
Su valor es mayor a la parte anterior porque siempre una opción americana vale tanto o más que una europea.

d)

En presencia de dividendos el análisis sufre los siguientes cambios:

+ Se requiere identificar el momento óptimo de ejercicio en el caso de desear hacerlo

+ Generalmente el arbol no se recombina.

En este caso al tratarse de una put el momento óptimo de ejercicio es post-dividendo. Entonces la trayectoria de precios es:

t=0	t=1 PRE-DIV	t=1 POST-DIV	t=2	t=3
				37,87*1,106=41,88
			34,24*1,106=37,87	
	40*1,106=44,24	44,24-10=34,24		30,95*1,106=34,23
			34,24*0,906=30,95	
				30,95*0,906=27,98
40				
				28,93*1,106=32
			26,16*1,106=28,93	
	40*0,906=36,16	36,16-10=26,16		28,93*0,906=26,16
			26,16*0,906=23,65	
				23,65*0,906=21,38