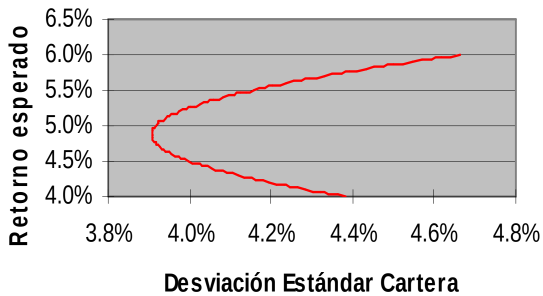
INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Introducción a las Opciones: Valorización Neutra al Riesgo

2011 J. Miguel Cruz

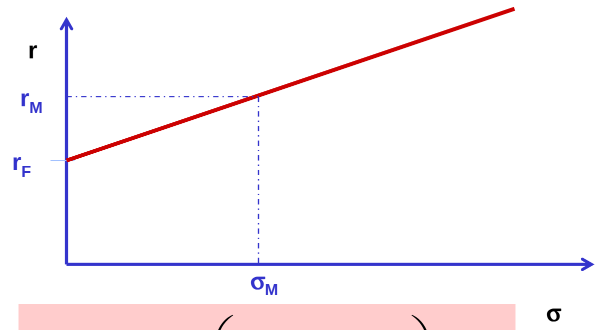
Introducción

- Mundo real es averso al riesgo



INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE
J. Miguel Cruz
2011

Línea de mercado de capitales



El retorno de cualquier cartera en la frontera se expresa como una relación lineal de la volatilidad de dicha cartera

$$r = r_F + \left(\frac{r_M - r_F}{\sigma_M} \right) \cdot \sigma$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Obtenemos así retorno esperado del activo i en la cartera M

- Para el caso de un activo en particular,

$$\bar{r}_i = r_F + \beta_i \cdot (r_M - r_F)$$

- En donde,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{Cov(r_i, r_M)}{Var(r_M)}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

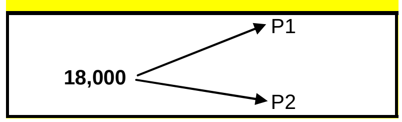
J. Miguel Cruz 2011

¿Y si el mundo fuera distinto?

- Si el retorno esperado fuera la única variable de decisión
- Volatilidad no entraría en la decisión
- Cual sería el retorno esperado del activo i en la cartera M?
- Por qué es relevante esto?

Supongamos mundo discreto

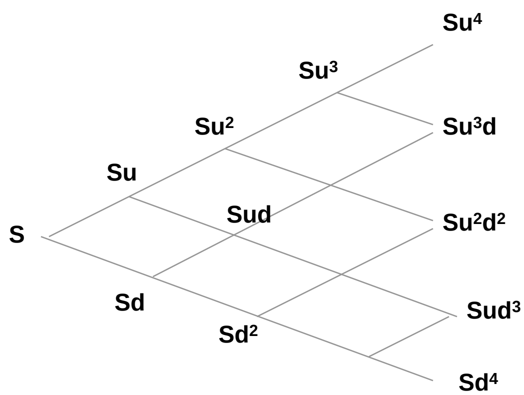
Anual	
mu	16.50%
sigma	23.72%



¿Cuánto valen P1 y P2 compatible con el modelo log normal de precios?

Árboles Binomiales

- Árboles Binomiales: precio sube una fracción u, o baja d, con probabilidad p y 1-p.



INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Calibramos el árbol

- Sabemos que E{Ln(S(t)/S(0))} = μt
- Y que Desvest{Ln(S(t)/S(0))}= $\sigma\sqrt{t}$
- Luego, (con S(0)=1), para un período Δt en el árbol tendremos que su valor esperado y varianza son

$$E\{\ln(S(1))\} = p\ln(u) + (1-p)\ln(d)$$
$$V\{\ln(S(1))\} = p(1-p)(\ln(u)-\ln(d))^2$$

- Como nos falta una ecuación, podemos suponer u=1/d, o bien p=1/2

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

2 Soluciones estándares

- **Caso u=1/d**

$$u = A + \sqrt{A^2 - 1} \quad d = A - \sqrt{A^2 - 1}$$
$$A = \frac{1}{2}\left(e^{-\mu\Delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\Delta t}\right)$$
$$p = \frac{e^{-\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

- **Pero para Δt pequeños se aproxima:**

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE — J. Miguel Cruz 2011

Caso p=1/2

- **Caso u=1/d**

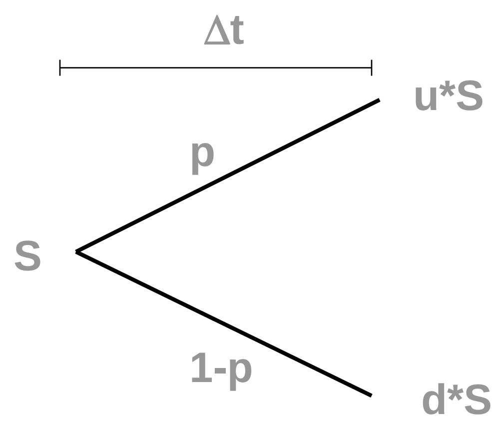
$$u = e^{\mu\Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right)$$
$$d = e^{\mu\Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right)$$
$$p = \frac{1}{2}$$

- **Pero para Δt pequeños se aproxima:**

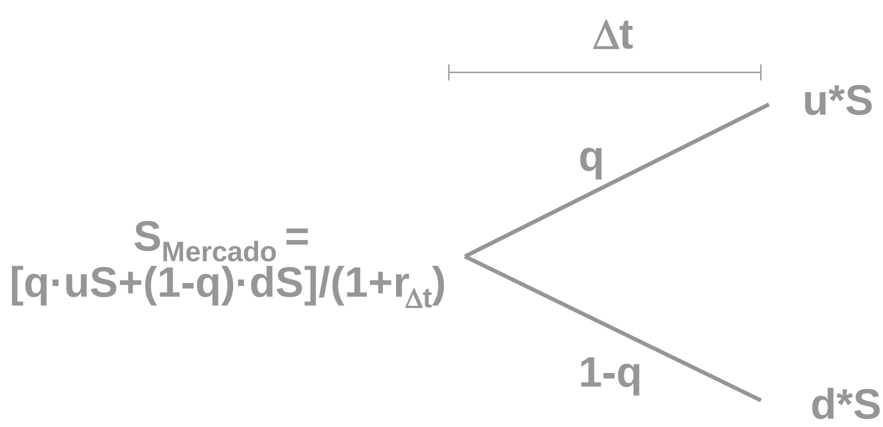
$$u = e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$p = \frac{1}{2}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE — J. Miguel Cruz 2011

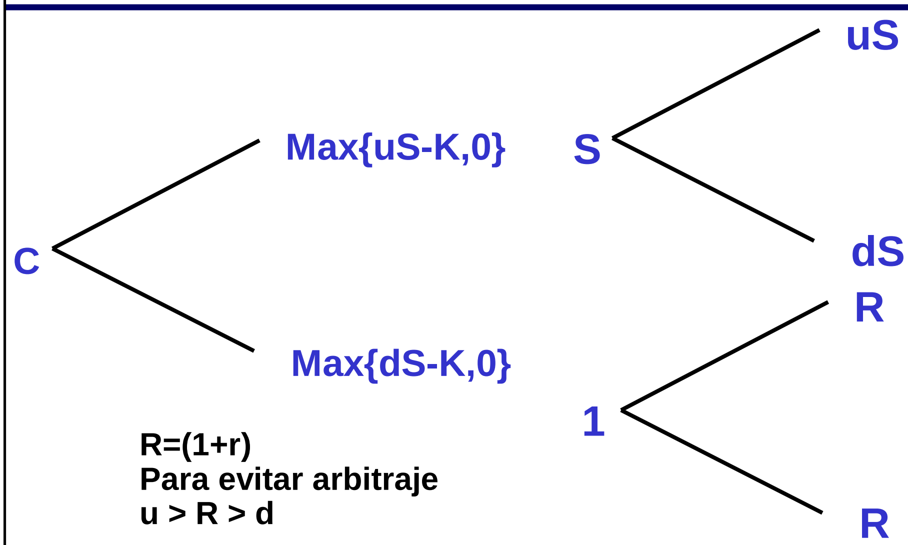
Luego cada rama del árbol presenta las siguientes características



Clave en la valorización neutra al riesgo es que



Supongamos ahora que tenemos una Call y un depósito libre de riesgo

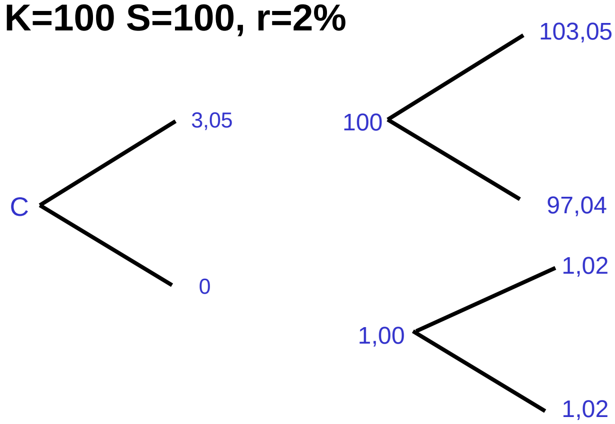


R=(1+r)
Para evitar arbitraje
u > R > d

Ejemplo, ¿cuánto vale C?

- Supongamos que σ=3% y μ=1%
- K=100 S=100, r=2%

$$u = 1{,}0305$$
$$d = 0{,}9704$$
$$p = 0{,}66667$$



Cómo podemos replicar el valor obtenido por la opción?

- Crear una cartera en que invierto x en acciones y b en el activo libre de riesgo, al período siguiente tendría que,

$$u \cdot x + R \cdot b = C_u \equiv \max\{uS - K, 0\}$$
$$d \cdot x + R \cdot b = C_d \equiv \max\{dS - K, 0\}$$

- Despejando, llego a que:

$$x = \frac{C_u - C_d}{u - d}$$
$$b = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{R \cdot (u - d)}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Valor de la Call es entonces x+b

- x+b genera los mismo flujos que la Call, independiente de los estados de la naturaleza y sus distribuciones de probabilidad, e independiente de la actitud al riesgo de los inversionistas:

- O bien,

$$x + b = C = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d} \cdot C_u + \frac{u-R}{u-d} \cdot C_d\right)$$

$$C = \frac{1}{R}\left(q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d\right)$$

Se puede escribir como

$$C(T-1) = \frac{1}{R}\hat{E}\left(C(T)\right)$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Interpretación de Valor Esperado

- Podemos interpretar que el valor de C se encuentra tomando el valor presente del valor esperado de la call, usando la probabilidad q.
- La probabilidad q es nuestra conocida probabilidad neutra al riesgo
- La podemos calcular asegurándonos que se cumple que S = 1/R{quS+(1-q)dS}
- Notar que la valorización es independiente de p...esto es por que en ningún minuto enfrentamos incertidumbre alguna.
- La tendencia de la acción no aparece ya que supusimos Δt pequeño

Resolución de un árbol binomial

- Generar los posible valores del activo subyacente en todos los nodos
- Generar los valores del nodo terminal de acuerdo al precio de ejercicio
- Retroceder un período, y calcular los valores presentes esperados con probabilidades neutras al riesgo, y en el caso de opciones americanas, calcular el valor de ejercer la opción en este nodo intermedio. Escoger como valor del nodo el máximo de ambos valores.
- Continuar hasta llegar al valor inicial de la opción
- Ejemplo

Valorización Neutra al Riesgo

- Supongamos que la acción sigue un MBG

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

- Sabemos que $E\{S(t)\} = S(0)e^{\mu t}$
- En un mundo neutro al riesgo, existe una distribución de probabilidad tal que

$$S(0) = e^{-rt}\hat{E}\{S(t)\}$$

- Y esto ocurre si

$$\hat{E}\{S(t)\} = S(0)e^{rt}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Ejemplo

Sigma	0.50%	diaria
mu	0.004%	diaria
S0	100	
r	5.00%	anual

R	1.00407
u	1.02776
d	0.97299
q	0.56753
1-q	0.43247

0	1	2	3	4	5	6
100.000	102.776	105.630	108.563	111.577	114.675	117.859
	97.299	100.000	102.776	105.630	108.563	111.577
		94.670	97.299	100.000	102.776	105.630
			92.113	94.670	97.299	100.000
				89.624	92.113	94.670
					87.203	89.624
						84.847

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Mecanismo de Valorización

- **Si encontramos probabilidades neutras al riesgo para x, podemos usarlas para f(x):**

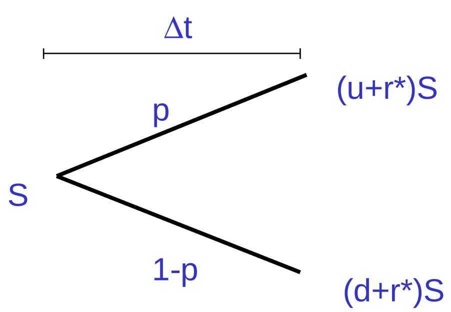
$$\text{si, } P_x = VP\left\{\hat{E}\left[(x)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow P_f = VP\left\{\hat{E}\left[f(x)\right]\right\}$$

- **En particular, si f(x) es una opción….**

Árbol Binomial para opciones de moneda

- **r* es la ganancia en intereses en Δt por tener la moneda extranjera:**



Rehaciendo el argumento de cartera replicada, basta reemplazar en el árbol la probabilidad neutra al riesgo por

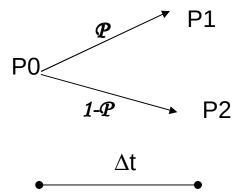
$$q = \frac{R - d - r^*}{u - d}$$

Caso de Moneda:

Sistema de ecuaciones en el mundo neutro al riesgo obtiene Q
Reemplazando μ por (r-r*)

- **Para este simple proceso tenemos que:**

(r-r*)



$$E(Ln(\widetilde{P}/P0)) = \mu \cdot \Delta t$$

$$V(Ln(\widetilde{P}/P0)) = \sigma^2 \cdot \Delta t$$

Q

- **Es decir:**

$$\mathcal{P}\,Ln(P1/P0)+(1-\mathcal{P})Ln(P2/P0) = \mu\Delta t$$

$$\mathcal{P}(Ln(P1/P0))^2+(1-\mathcal{P})(Ln(P2/P0))^2 - (\mu\Delta t)^2=\sigma^2\Delta t$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011