INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

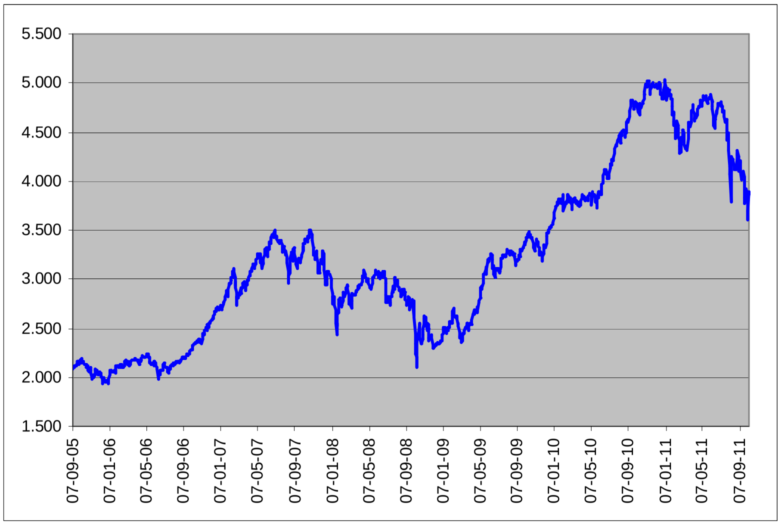
Procesos de Precios

2011
J. Miguel Cruz

Agenda

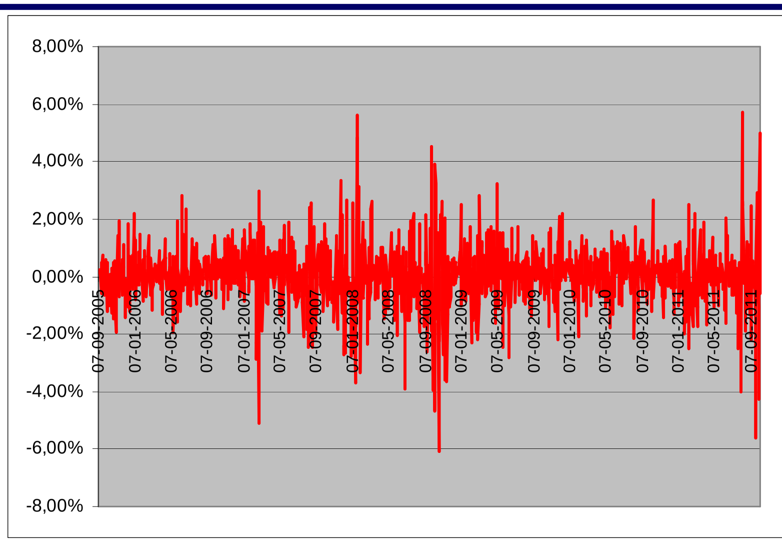
- Series Financieras
- Volatilidad
- Caminos aleatorios y Proceso de Wiener
- Modelando el precio de una acción
- Ejercicios

Historia reciente del IPSA



La misma serie … desde otra perspectiva

(Cambios diarios en el IPSA)

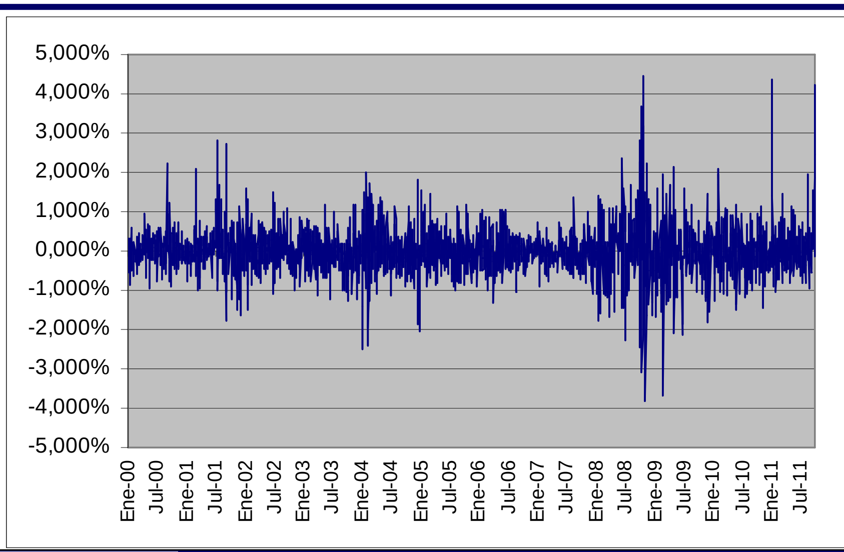


Once años de historia del dólar

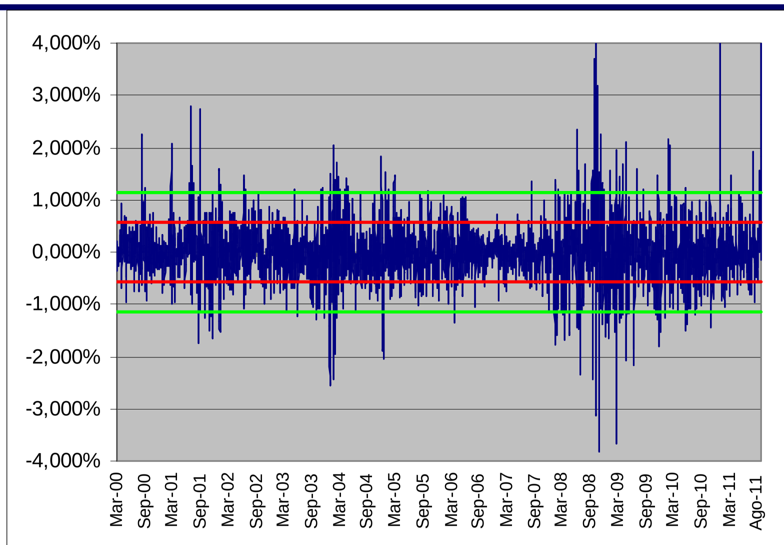
(Dólar Observado)

La misma serie … desde otra perspectiva

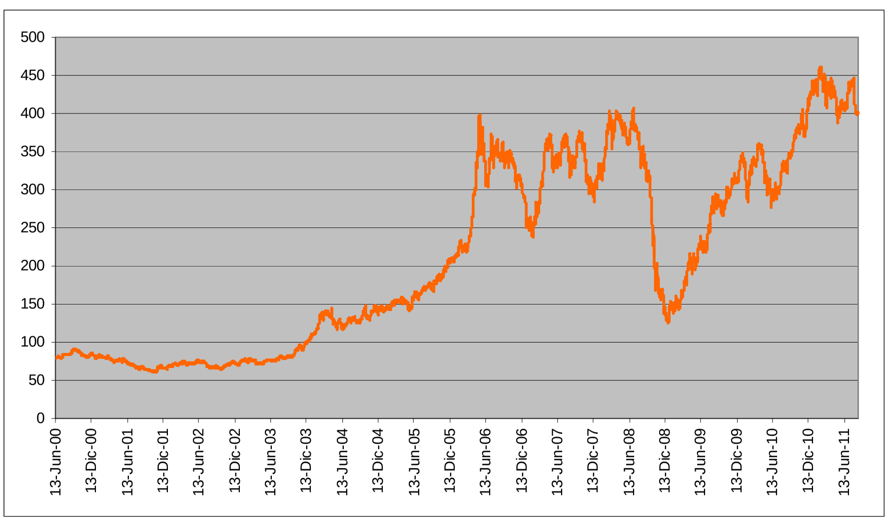
(Cambios diarios en el dólar observado)



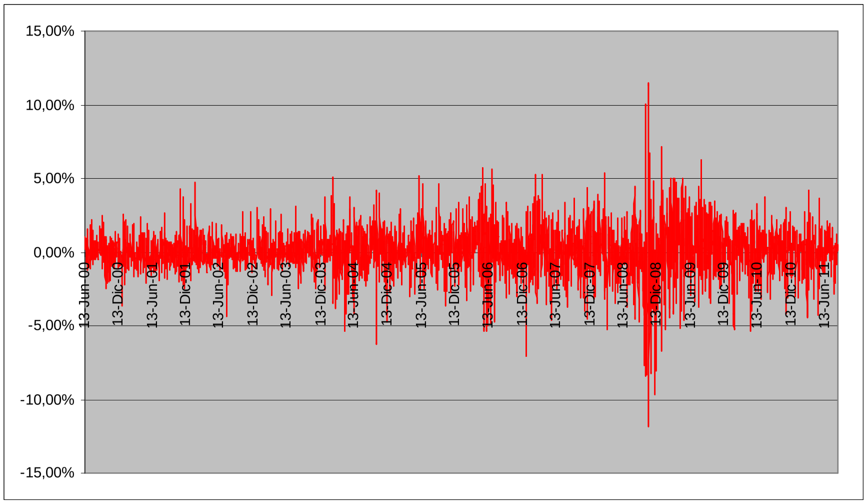
Cambios porcentuales y su desviación estándar



Caso del Cobre



Volatilidad aumenta en los últimos años

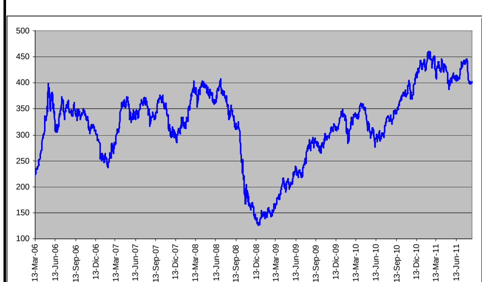


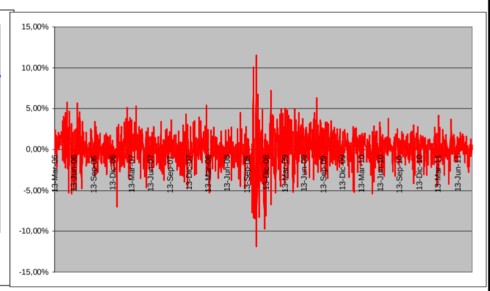
INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE — J. Miguel Cruz 2011

Desde 2006 hasta hoy

Precios con niveles más altos

Volatilidad aumenta casi 2% diaria





INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE — J. Miguel Cruz 2011

Comportamiento de los factores de riesgo

Para pequeños intervalos de tiempo, el cambio porcentual es equivalente al logaritmo del retorno.

Modelo Multiplicativo

$$\frac{\tilde{P}_{t+1} - P_t}{P_t} \approx Ln\left(\frac{\tilde{P}_{t+1}}{P_t}\right) = \tilde{\varepsilon}_t$$

Supuesto: $\varepsilon_t \to N(\mu, \sigma^2)$

Es un buen supuesto para los retornos logarítmicos?

- **Cálculo del retorno:**
  - Los retornos se prefieren a los cambios absolutos en los precios, porque los últimos no miden el cambio en términos de un precio dado
  - Es conveniente utilizar los retornos logarítmicos porque tiene la siguiente propiedad
  - Sean los retornos R acumulados ,y r los retornos diarios:

$$R_t(k) = Ln(P_{t+k} / P_t)$$
$$r_t(i) = Ln(P_{t+i} / P_{t+i-1})$$
$$R_t(k) = \sum_{i=1}^{k} r_t(i)$$

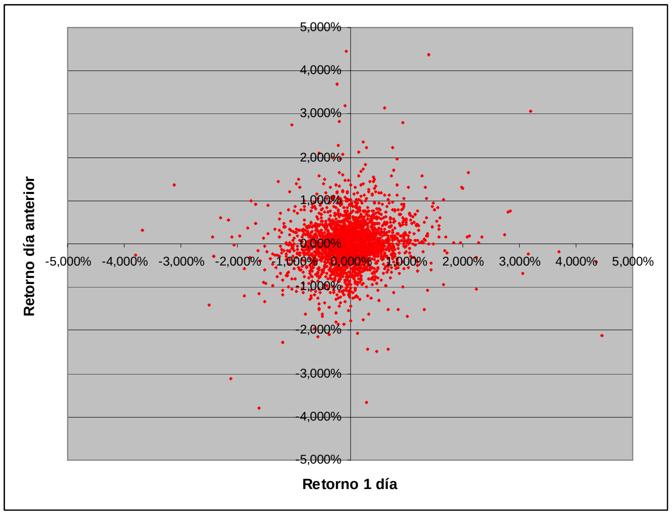
Es decir, el retorno de un mes es la suma de los retornos diarios

Retornos diarios

- Qué ocurre si $r_t(i)$ son independientes entre sí?
  $Cov(r_t(i) ; r_t(j)) = 0$ para i distinto de j

- Qué ocurre si están correlacionados positivamente (o negativamente)?

Caso del dólar R^2=0,02



Suponiendo que R(k) es normal

- **Entonces, si los retornos diarios se distribuyen de manera idéntica:**

$$E_t[R_t(k)] = E_t[\sum_{i=1}^{k} r_t(i)] = \sum_{i=1}^{k} \mu = k\mu$$

- **Y por otro lado,**

$$V_t[R_t(k)] = V_t[\sum_{i=1}^{k} r_t(i)] = \sum_{i=1}^{k} \sigma^2 = k\sigma^2$$

- **Es decir,**

$$R_t(T-t) \rightarrow N(\mu(T-t); \sigma^2(T-t))$$

Precios: Distribución Log-Normal

Es decir podemos escribir:

$$\widetilde{P}_{t+1} = P_t e^{\varepsilon_t}$$

$$\varepsilon_t \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

Innovación se distribuye en forma Normal:

Distribución de probabilidad en k períodos más

- **Si** $\tilde{x}_{t+1} = Ln(\frac{\tilde{P}_{t+1}}{P_t}) \rightarrow N(\mu;\sigma^2)$ indep.
- **Entonces** $\sum_{i=1}^{T} \tilde{x}_{t+i} = Ln(\frac{\tilde{P}_{t+k}}{P_t}) \rightarrow N(\mu k;\sigma^2 k)$
- **Por lo que** $Ln(\tilde{P}_{t+k}) \rightarrow N(\mu k + Ln(P_t);\sigma^2 k)$
- **O bien**

$$\tilde{P}_{t+k} = P_t e^{\mu k + \sigma\sqrt{k}\tilde{\varepsilon}} \qquad con\ \tilde{\varepsilon} \rightarrow N(0,1)$$

Simulando un proceso de difusión

- **En forma secuencial,**

$$Ln(\mathbf{P}_{\mathbf{t}+\Delta t}) = Ln(\mathbf{P}_t) + \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot N(0,1)$$

- **En forma continua (Z_t es un proceso Normal estándar):**

$$dLn(\mathbf{P}_\mathbf{t}) = \mu \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{dt} \cdot Z_t$$

- **Proceso de difusión aritmético (p=Ln(P))**

$$dp = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz$$

Parámetros para el corto plazo

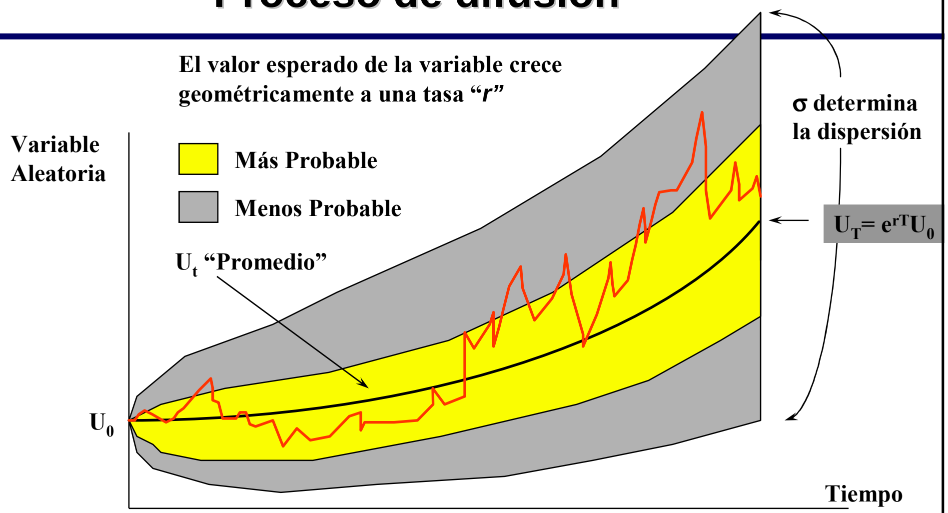
- **Objetos de análisis: retornos log**

$$\tilde{x}_{t+1} = Ln(\frac{\tilde{P}_{t+1}}{P_t})$$

- **Cómo obtener σ**
  - Estimación histórica
  - Proyección de volatilidades
  - Volatilidades implícitas
- **Cómo obtener μ**
  - Visón de mercado
  - Precios futuros

J. Miguel Cruz
2011

Proceso de difusión



Supuesto más común es que la varianza del proceso es proporcional al tiempo. Por lo tanto, la desviación estándar es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

J. Miguel Cruz
2011

Efecto de Itô

- Sabemos que

$$\boxed{dp = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz}$$

- pero si realizamos un cambio de variable,

$$p = Ln(\mathbf{P})$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{\mathbf{P}} = \mu_P \cdot dt + \sigma \cdot dz \qquad \mu_P = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

Movimiento Browniano Geométrico

- Ecuación de difusión

$$d\mathbf{P} = \mu_P \cdot \mathbf{P} \cdot dt + \sigma \cdot \mathbf{P} \cdot dz$$

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

- donde

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0,1)$$

Ejemplos de procesos: Tasas de Interés

Modelo de Vasicek

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a \cdot (b - r_t) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot N(0,1)$$

Modelo CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a \cdot (b - r_t) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{r_t \cdot \Delta t} \cdot N(0,1)$$

Modelo de Hull & White

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a \cdot (b(t) - r_t) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{r_t \cdot \Delta t} \cdot N(0,1)$$