INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

2. Teoría de Carteras Revisitada y Administración de Renta Variable

IN5303

Finanzas II

2011 J. Miguel Cruz

Fijando el horizonte de análisis, nos concentramos en N activos riesgosos

- **Variable aleatoria es el retorno entre t y t+1 de los diferentes activos:**

$$\tilde{\mathbf{R}} \to N(\mathbf{R_e}, \mathbf{\Sigma})$$

donde *Re* **es el vector de retornos esperados y** Σ **es la matriz varianza covarianza.**

El vector de retornos aleatorios se define como:

$$\left[\tilde{\mathbf{R}}\right]_i = \tilde{r}_i = Ln\left(\frac{\tilde{P}_{i,t+1}}{P_{i,t}}\right)$$

$$con \left[\mathbf{R_e}\right]_i = E(\tilde{r}_i), y \left[\mathbf{\Sigma}\right]_{ij} = \mathrm{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE J. Miguel Cruz 2011

Definimos una cartera o portafolio como una selección de activos

- Una cartera es un vector *w* de porcentajes invertidos en cada uno de los activos

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{\mathbf{1}} = \sum_{1}^{N} w_i = 1$$

- La cartera tiene un retorno esperado *r:*

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R_e} = \sum_{1}^{N} w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

- y una varianza σ^2:

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} = \sigma^2$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Volatilidad de una cartera

- Habíamos visto que para una cartera, la volatilidad es

$$\sigma_C = \sqrt{w^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho}$$

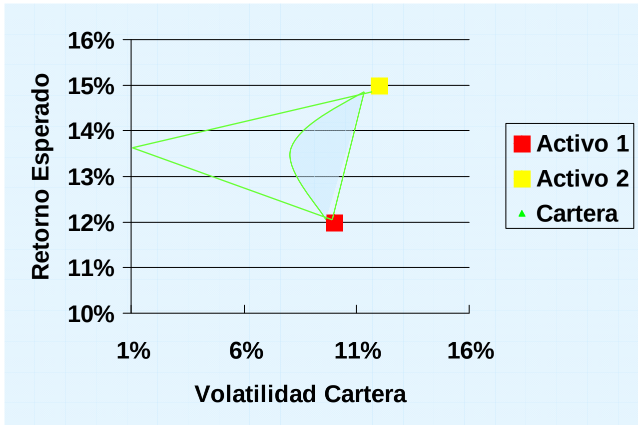
- Si volatilidad del activo 1 es 10% y del activo 2 es 12%, y su correlación es -0.5 entonces

Fracción w	Vol Cartera
0.0	12.0%
0.5	5.6%
1.0	10.0%

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

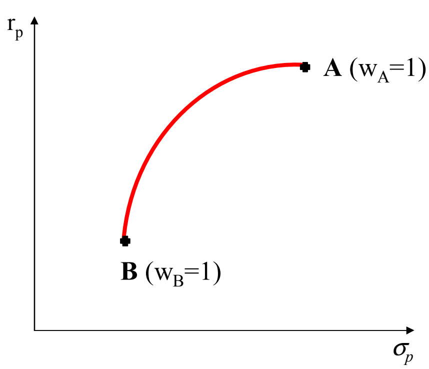
Graficando Retorno y Riesgo para una cartera

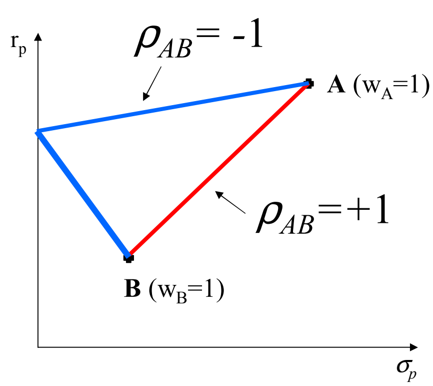


INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Carteras posibles con 2 activos





- Instrumentos con correlación positiva moderada

- Correlación perfecta (positiva y negativa)

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Diversificación de riesgos

- Una adecuada selección del peso en cada uno de los activos permite una disminución del riesgo de la cartera.
- Un menor riesgo implica siempre una mayor rentabilidad?
- Es posible encontrar una cartera con riesgo cero?
- Qué pasa para más de dos activos?

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Varianza de un portafolio de N instrumentos

- Varianza del Portafolio:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

- Supongamos que el peso de cada instrumento es igual a 1/N
- En la varianza del portafolio, existen N varianzas ponderadas por 1/N y N^2-N covarianzas. Podemos decir entonces que la varianza del portafolio es:

$$\text{Varianza} = \text{N}\left(\frac{1}{\text{N}}\right)^2(\text{varianza promedio}) + (\text{N}^2 - \text{N})\left(\frac{1}{\text{N}}\right)^2(\text{covarianza promedio})$$

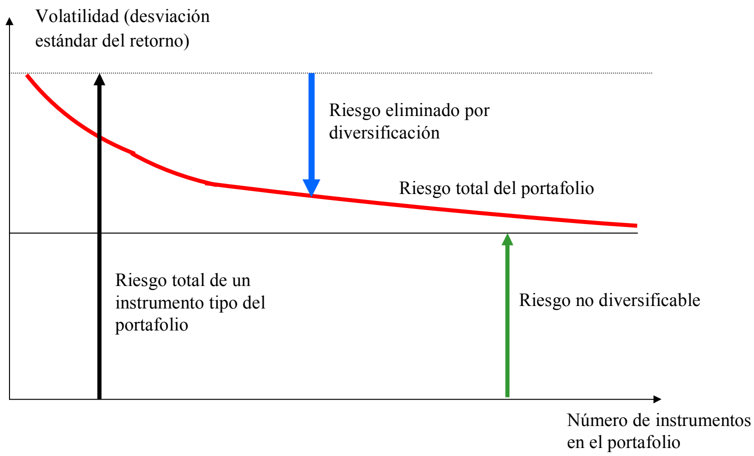
$$\text{Varianza} = \frac{1}{\text{N}}(\text{varianza promedio}) + \left(1 - \frac{1}{\text{N}}\right)(\text{covarianza promedio})$$

- Si N es muy grande, la varianza del portafolio tiende a la covarianza promedio de los instrumentos.

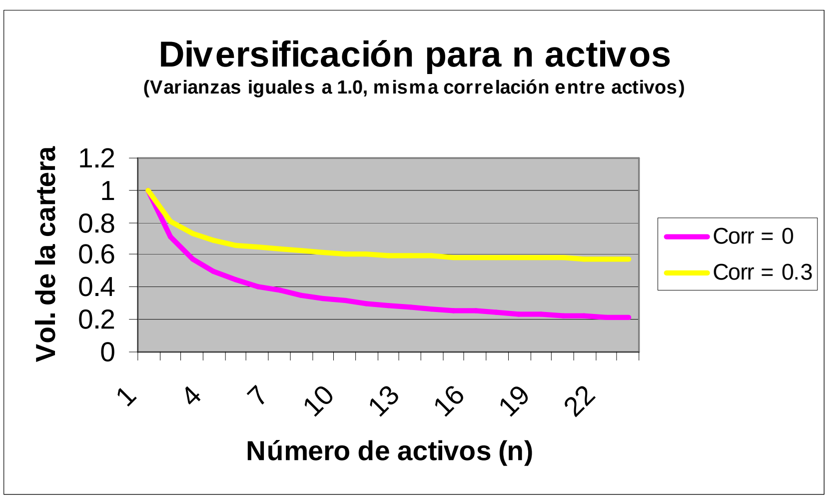
INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

La varianza del portafolio descenderá hasta un nivel donde no será posible reducir más su varianza.



Diversificación depende de la correlación



Contribución al Riesgo

- Como

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

- Entonces,

$$\sigma = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot RMg_i = \sum_{i=1}^{n} CR_i$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Frontera de mínima varianza de Carteras

Podemos resolver el siguiente problema

$$\underset{\mathbf{w}}{Min} \frac{1}{2} \sigma_C = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w}}$$

$$s.a. \quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{1}} = 1$$

$$s.a. \quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{e}} = r$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Condiciones necesarias y suficientes para carteras en la frontera de mínima varianza

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \cdot w_j - \lambda \cdot \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1 \ldots N$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Teorema de dos fondos

Matricialmente, la solución para *w* se despeja de

$$\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w} - \lambda \mathbf{R_e} - \mu \vec{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R_e} = r$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \vec{\mathbf{1}} = 1$$

Solución es de la forma,

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{g} + \mathbf{h} r$$

Con *g* y *h* vectores que dependen de la matriz varianza covarianza y el vector de retornos esperados

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Vectores g y h:

Si definimos

$$a = \vec{\mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{R_e}$$

$$b = \mathbf{R_e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R_e}$$

$$c = \vec{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \vec{\mathbf{1}}$$

$$d = b \cdot c - a^2$$

Entonces,

$$\mathbf{g} = \frac{1}{d}\left[b \cdot \Sigma^{-1} \vec{\mathbf{1}} - a \cdot \Sigma^{-1} \mathbf{R_e}\right]$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{d}\left[c \cdot \Sigma^{-1} \mathbf{R_e} - a \cdot \Sigma^{-1} \vec{\mathbf{1}}\right]$$

Teorema de dos fondos

Si $w1$**, y** $w2$ **son dos soluciones conocidas del problema para r distintos, entonces**

$$w3 = \alpha\, w1 + (1 - \alpha)\, w2$$

es también una solución para r3= αr1 + (1 - α) r2.

Es decir, para construir toda la frontera de mínima varianza bastan dos carteras diferentes que pertenezcan a la frontera.

Relación entre el retorno esperado y la varianza de las carteras de la frontera

- **Para la cartera de la frontera de mínima varianza tenemos que**

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{g} + \mathbf{h}r)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot (\mathbf{g} + \mathbf{h}r)$$

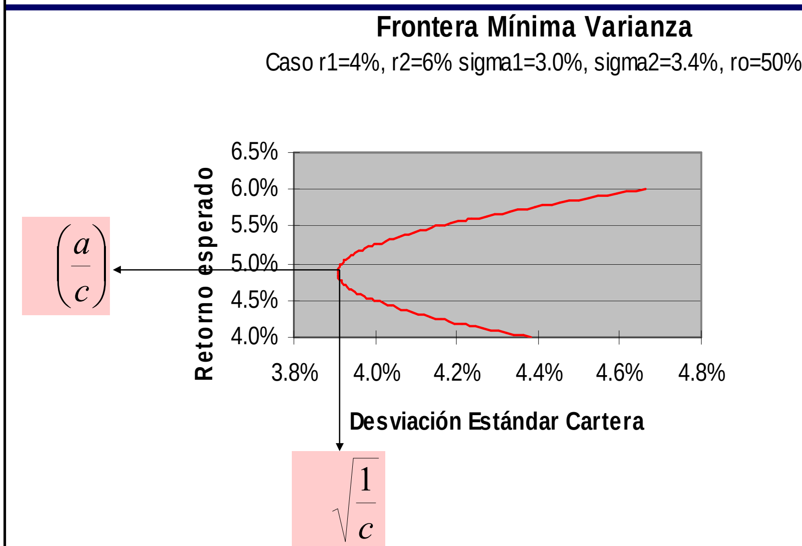
- **Lo que equivale a**

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{d}\right) \cdot \left[c \cdot r^2 - 2 \cdot a \cdot r + b\right]$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Carteras de mínima varianza definen una parábola en el espacio r-σ^2

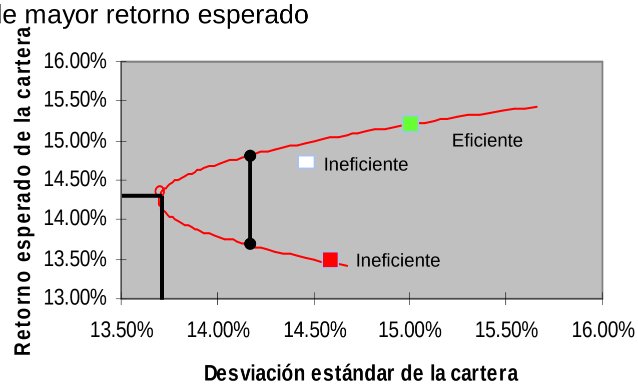


INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Concepto de frontera eficiente de carteras

Agentes prefieren al mismo nivel de volatilidad carteras de mayor retorno esperado



INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Proposiciones

- **Prop1: Covarianza entre un portfolio p de la frontera de mínima varianza, y el portfolio de mínina varianza mv es igual a la varianza de éste último.**

$$\operatorname{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mv}) = \sigma_{mv}^2 = \left(\frac{1}{c}\right)$$

- **Prop2: Para todo porfolio p en la frontera de mínima varianza, excepto para el portfolio mv, existe un portfolio q único en la frontera tal que la covarianza entre p y q sea cero. (llamaremos a q zc(p))**

$$\operatorname{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zc(p)}) = 0 = \mathbf{w}_p^T \Sigma \mathbf{w}_{zc(p)}$$

- **y se da que**

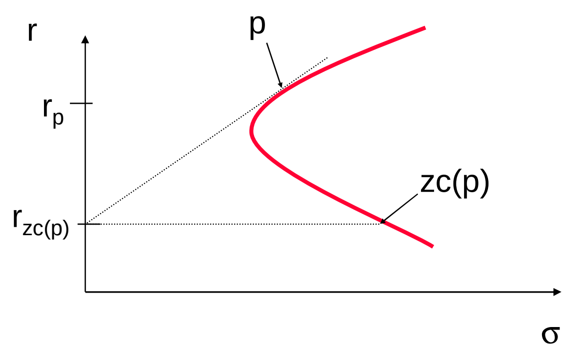
$$r_{zc(p)} = \frac{a}{c} - \frac{d/c^2}{r_p - a/c}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Si portfolio p es eficiente, entonces zc(p) no lo es

- **Además, se puede mostrar que p y zc(p) son tales que:**



Finalmente podemos mostrar CAPM sin activo libre de riesgo

- **Si p es un portfolio de la frontera otro que el mv, y q es cualquier portfolio (en particular un activo individual), entonces,**

$$\operatorname{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \mathbf{w}_p^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}_q = \lambda r_q + \mu$$

- **Luego podemos escribir que**

$$r_q = (1 - \beta_{qp}) \cdot r_{zc(p)} + \beta_{qp} \cdot r_p$$

- **Definiendo a**

$$\beta_{qp} = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q)}{\sigma_p^2}$$

El retorno de la cartera q se puede descomponer en riesgo sistemático y riesgo específico:

- El retorno aleatorio se puede descomponer entonces como:

$$\tilde{r}_q = (1-\beta_{qp})\cdot\tilde{r}_{zc(p)} + \beta_{qp}\cdot\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_q$$

- con

$$\mathrm{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zc(p)}) = 0$$
$$\mathrm{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{\varepsilon}_q) = 0$$
$$\mathrm{cov}(\tilde{r}_{zc(p)}, \tilde{\varepsilon}_q) = 0$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011