Ingeniería Civil Industrial
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
IN4221-1 Teoría de Juegos
Profesor: Roberto Cominetti. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Francisco Unda.

Auxiliar 7

Consideramos un juego de maximización con k jugadores, denotamos por A_i el espacio de estrategias puras del jugador i, y por S_i el de estrategias mixtas. Definimos $A := A_1 \times \cdots \times A_k$ y $S := S_1 \times \cdots \times S_k$.
Denotamos por $S \oplus s_i'$ al espacio de estrategias obtenido cuando el jugador i elige s_i' en vez de s_i, con $\emptyset_i$ la estrategia nula (el jugador i no hace nada).
Notamos a veces por s^t el perfil de estrategias al tiempo t, y por s_i^t la estrategia de i al tiempo t.

Sea $u : A \to \mathbb{R}$ la función de utilidad social, y $v_i : A \to \mathbb{R}$ las funciones de utilidad de cada jugador $i \in \{1, ..., k\}$.
Sean a su vez $\widehat{u} : S \to \mathbb{R}$ y $\widehat{v_i} : S \to \mathbb{R}$ las extensiones a estrategias mixtas.

Consideramos además $\mathbf{OPT} := \max_{s \in S} \widehat{u}(s)$, y si s' es el peor equilibrio de Nash, entonces $PoA = \frac{\mathbf{OPT}}{\widehat{u}(s')}$.

Definición 1. *Se define el Regret del jugador i, dado el conjunto de acciones $S^1, ..., S^T$, por:*
$R^T := \max_{s_i \in S_i} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \widehat{v_i}(s^t \oplus s_i) - \widehat{v_i}(s^t)$

Queda propuesto probar la siguiente propiedad:

Propiedad 1. *Cuando un jugador i utiliza un algoritmo de minimización de regret, para cualquier secuencia $s^1, ..., s^T$ se tiene lo siguiente:* $\max_{s_i \in S_i} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \widehat{v_i}(s^t \oplus s_i) \leq R^T + \mathbb{E}\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \widehat{v_i}(s^t)\right]$
Con $\mathbb{E}$ respecto a la aleatoriedad del algoritmo, y donde $R^T \to 0$ cuando $T \to \infty$. Denotamos por T_ϵ el número de pasos tales que $R^T = \epsilon$.

Definición 2. *Definimos el Precio de la Total Anarquía (PoTA) como:* $\max_{T; s^1, ..., s^T} \frac{\mathbf{OPT}}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \widehat{v_i}(s^t)}$, *con $s^1, ..., s^T$ minimizando el regret.*

Definición 3. *Sea O_i^t el conjunto de las jugadas al tiempo t de los jugadores distintos a i. Notamos por $O_i = \sum_{t=1}^{T} O_i^t$, la unión, con multiplicidad, de todas las jugadas de los jugadores distintos a i sobre todos los períodos.*

P1. (Juego de Hotelling generalizado y $PoTA$)

Sea $G = (V, E)$ un grafo de n vértices, cada jugador (vendedor en un local establecido) $i \in \{1, ..., k\}$ tiene como conjunto de estrategias $A_i = V$. Cada día todos los clientes eligen un camino sobre las rutas del grafo, y compran al vendedor que encuentren primero (supongamos que tenemos un cliente en cada vértice que compra al vendedor más cercano), si hay dos o mas a la misma distancia, el cliente divide la compra entre ellos. En cualquier instante t el bienestar social viene dado por $\widehat{u}(s^t) = \min_i \widehat{v_i}(s^t)$ (se busca maximizar el valor del que gana menos, hacer mas justo el juego). El óptimo social es obtenido al dividir equitativamente todos los vértices entre los k vendedores. De donde $\mathbf{OPT} = \frac{n}{k}$.

Definición 4. *Sea $\Delta_i^{t \to u}$ la cantidad tal que si el jugador i juega una acción uniformemente aleatoria dentro de O_i^t al paso u, éste alcanza un pago esperado de $\frac{n}{2k-2} + \Delta_i^{t \to u}$. Notar que $\Delta_i^{t \to t} = 0$, pues los otros $k-1$ jugadores tienen pago promedio esperado exactamente igual a $\frac{n}{k-1}$ cuando el jugador i es removido.*

Pruebe que:

i) El Precio de la Anarquía (PoA) de este juego es $\frac{2k-2}{k}$.

ii) $\forall i, \forall 1 \leq t, u \leq T, \quad \Delta_i^{u \to t} + \Delta_i^{t \to u} \geq 0$

iii) Usando lo anterior probar que $PoTA$ es asintóticamente igual a $\frac{2k-2}{k}$.

$\boxed{\text{P2.}}$ (Juegos Válidos)

Consideramos ahora que cada jugador i tiene un conjunto V_i que acepta un orden parcial, de donde él puede jugar algún subconjunto. Sea $V = V_1 \times \cdots \times V_k$ y consideramos $A_i := \{a_i \subset V_i : a_i \text{ es una acción admisible}\}$. La función de utilidad social la definimos como $u : 2^V \to \mathbb{R}$, y cada jugador tiene una función $v_i : 2^V \to \mathbb{R}$. La derivada discreta de una función de conjuntos f en $X \subset V$ en la dirección $D \subset V \backslash X$ es $f'_D(X) = f(X \cup D) - f(X)$.

Definición 5. *Una función de conjuntos* $f : 2^V \to \mathbb{R}$ *es submodular si para* $A \subset B$, $f'_D(A) \geq f'_D(B), \quad \forall D \subset V \backslash B$.

Definición 6. *Un juego como el anterior, se dice válido si* u *es submodular y*

1. $\widehat{v}_i(S) \geq \widehat{u}'_{s_i}(S \oplus \emptyset_i)$
2. $\sum_{i=1}^{k} \widehat{v}_i(S) \leq \widehat{u}(S)$

Pruebe que:

i) Si todos los jugadores juegan sus estrategias minimizando el regret por T rondas, con perfiles de estrategias S^t al tiempo t, y $\Omega = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ es tal que $\widehat{u}(\Omega) = \mathbf{OPT}$ entonces:

$$\mathbf{OPT} \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(2\widehat{u}(S^t) - \sum_{i:\sigma_i = s_i^t} \widehat{u}'_{s_i}(S \oplus \emptyset_i) - \sum_{i:\sigma_i \neq s_i^t} \widehat{u}'_{s_i}(\Omega \cup (S \oplus \emptyset_i \oplus \cdots \oplus \emptyset_k)) \right) + \epsilon k$$

ii) Deducir que si u es no decreciente, entonces el Precio de la Total Anarquía para juegos válidos es asintóticamente igual a 2 (que coincide con el PoA).